第14卷 第4期 北京工业大学学报 Vol. 14, No. 4
1988年12月 JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY Dec., 1988

一类连续函数的半解析分解

王见定

(中国人民大学第一分校)

【摘要】 给出了一阶偏导Hölder连续的复函数的半解析表达式，为研究一类较普遍的复函数提供了方法。

关键词：Hölder连续，半解析函数，半解析分解

定理 有限域D上一阶偏导Hölder连续的$f(z)$可以分解成两个半解析函数的和.

即 $$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$$

其中，$f_1(z), f_2(z)$分别为第一、第二类半解析函数.

称$\mu(x, y, z)$在域D内Hölder连续，若对任意的两点P、$Q\in D$，有$|\mu(p)-\mu(0)|\leqslant K\overline{PQ}^{\alpha}$.

其中$\overline{PQ}$是P, Q间的距离，K, α是常数，$0<\alpha<1$.

称$\boldsymbol{\mu}(x, y, z)=(\mu_1(x, y, z), \mu_2(x, y, z), \mu_3(x, y, z))$ Hölder连续，若$\mu_1(x, y, z)$, $\mu_2(x, y, z)$, $\mu_3(x, y, z)$都Hölder连续.

引理[1] 若$\mu(x, y, z)$在域D内Hölder连续，则一定存在两次连续可微的$G(x, y, z)$使

$$\nabla^2 G(x, y, z)=-4\pi(x, y, z)\text{成立}.$$

显然以上结论也适合矢量的情形，

即

$$\nabla^2 \mathbf{G}(x, y, z)=-4\pi\boldsymbol{\mu}(x, y, z)$$

证 由 $\nabla^2\psi=\nabla\cdot\mathbf{K}\Longrightarrow\psi=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla_t\cdot\mathbf{K}}{r}dv_t$

由$\nabla^2\boldsymbol{\varphi}=-\nabla\times\mathbf{K}\Longrightarrow\boldsymbol{\varphi}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla_t\times\mathbf{K}}{r}dv_t$

由引理，当$\mathbf{K}$的一阶偏导Hölder连续时，$\psi, \boldsymbol{\varphi}$都是二次连续可微的.

不难推出

$$\mathbf{K}=\nabla\times\boldsymbol{\varphi}+\nabla\psi \qquad **$$

显然，$\nabla\times\boldsymbol{\varphi}$是无源的，$\nabla\psi$是无旋的.

设$f(z)=(u, v)$，则$\overline{f(z)}=(u, -v)$

取 $$\mathbf{K}=(u, -v, 0)$$

本文于1987年12月15日收到.

∵　$f(z)$的一阶偏导Hölder连续

∴　$\mathbf{K}$的一阶偏导也Hölder连续

因此＊＊对此$\mathbf{K}$亦成立.

即　$\mathbf{K}=\nabla\times\boldsymbol{\varphi}+\nabla\psi=(K_x^{(1)},K_y^{(1)},K_z^{(1)})+(K_x^{(2)},K_y^{(2)},K_z^{(2)})$

不难验证$(K_x^{(2)},\ K_y^{(2)})$是无旋的.

事实上,

$$\nabla\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$\therefore\quad \nabla\times(K_x^{(2)},K_y^{(2)})=\nabla\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0$$

下面证明$(K_x^{(1)},K_y^{(1)})$是无源的.

由　$\mathbf{K}=\nabla\times\boldsymbol{\varphi}+\nabla\psi$ 知道

$$\nabla\times\boldsymbol{\varphi}=\nabla\times\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla_\xi\times\mathbf{K}}{r}dv_\xi$$

分析上式

$$\nabla_\xi\times\mathbf{K}=\nabla_\xi\times(K_\xi(\xi,\eta),\ K_\eta(\xi,\eta),\ 0)$$

$$=\left(0,\ 0,\ \frac{\partial K_\eta}{\partial\xi}-\frac{\partial K_\xi}{\partial\eta}\right)$$

$$\therefore\quad \nabla\times\boldsymbol{\varphi}=\nabla\times\left(0,\ 0,\ \frac{1}{4\pi}\int\frac{\frac{\partial K_\eta}{\partial\xi}-\frac{\partial K_\xi}{\partial\eta}}{r}dv_\xi\right)=(K_x^{(1)},K_y^{(1)},0)$$

∵　$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\varphi})=0$

即　$$\frac{\partial K_x^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial K_y^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial O}{\partial z}=0$$

由此得到　$$\frac{\partial K_x^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial K_y^{(1)}}{\partial y}=0$$

∴　$(K_x^{(1)},K_y^{(1)})$无源

∴　$(u,\ -v)=(K_x^{(1)},K_y^{(1)})+(K_x^{(2)},K_y^{(2)})$

取　$\overline{f_1(z)}=(K_x^{(1)},K_y^{(1)}),),\quad \overline{f_2(z)}=(K_x^{(2)},\ K_y^{(2)})$

即　$\overline{f(z)}=\overline{f_1(z)}+\overline{f_2(z)}$

则　$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$

由半解析函数的物理背景可知[2], $f_1(z),f_2(z)$分别是第一、二类半解析函数.

参 考 文 献

[1] R.柯朗, D.希尔伯特著. 译.数学物理方法卷Ⅱ.北京：科学出版社，1977:203

[2] 王见定. 半解析函数. 北京工业大学学报，1983；(3)：45～51

A Semi-analytic Representation of a Continuous Complex Function

Wang Jianding

[Abstract] In this paper a semi-analytic represen-tation of first order partial derivative Hölder-con-tinous complex function has been proovided.

Key words: Hölder-continuous, Semi-analytic function, Semi-analytic representation.