第 36卷 第 6期 北 京 工 业 大 学 学 报 Vol. 36 No. 6
2010年 6月 JOURNAL OF BEIJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY Jun. 2010

可压 Navier-Stokes-Poisson方程组的渐近性

王 术，张丽丽
(北京工业大学 应用数理学院，北京 100124)

摘 要：研究了等离子体物理科学中的三维可压 Navier-Stokes-Poisson方程初边值问题解的整体存在性与长时间渐近性，使用精细的能量估计证明了当初值是稳态解的小扰动时该问题存在唯一整体光滑解，而且当 $t\to\infty$时该整体光滑解以指数速率趋于稳态解.

关键词：等离子体物理；可压 Navier-Stokes-Poisson方程；渐近行为
中图分类号：O 175.29 **文献标志码**：A **文章编号**：0254－0037(2010)06－0850－09

1 问题的提出

本文考虑如下等离子体物理科学中的量纲一 Navier-Stokes-Poisson(NPS)方程组

$$\begin{cases} n_t+\nabla\cdot(nu)=0 \\ u_t+(u\cdot\nabla)u+\nabla h(n)=\nabla\Phi+\dfrac{\varepsilon\Delta u}{n} \\ \Delta\Phi=n-b(x) \end{cases} \tag{1}$$

这里 $x\in\Omega$, $t>0$, $\Omega\subset R^3$是有界光滑区域，其边界为 $\partial\Omega$. $n(x,t)$、$u(x,t)$、$\Phi(x,t)$分别表示电子密度、电子运动速度和电场的电势. 函数 $b(x)$表示给定的背景离子密度. NPS模型描述等离子体物理科学中可压电子在给定的背景密度下在电场的作用下的运动规律[1-3]. 近年来，NSP系统的研究已经得到广泛关注，Hao等[4]研究了在混合 Besov空间范数意义下 NSP系统的强解的整体存在性和唯一性；Donatelli[5]和 Yin等[6]研究了可压 NSP系统在大初值情形下弱解的整体存在性和强解的局部存在性. 对于拟中性极限和相关渐近极限问题的研究参见文献[7-8]；对于可压 NSP系统和相关系统的弱解的渐近行为和稳定性分析参见文献[9-10]. 最近几年对于半导体 Euler-Poisson方程的定解问题适定性、大时间渐近性以及小参数的渐近极限问题等研究结果已经相当完备. 例如，对于渐近行为，Guo等[11]证明了带绝缘边界条件和接触边界条件的 Euler-Poisson系统的全局光滑解的存在性，并证明了全局光滑解以指数速率趋于稳态解；在无界区域 R^3中，Hsiao等[12]研究了常数背景离子密度和常数稳态解情形下的 Euler-Poisson系统解的渐近行为. 相对而言，对于 NSP系统需要做更多的研究.

对于模型(1)，其初边值条件分别为

$$(n,u)(t=0)=(n_0,u_0) \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\nu}}|_{\partial\Omega}=0 \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{\nu}$表示 $\partial\Omega$的单位外法向量. 通过椭圆 Neumman边值问题在相差常数意义下的唯一性，规化 Φ的平均为 0，即

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\Phi(x,t)\,dx=0 \tag{4}$$

收稿日期：2009-06-18.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771009)；北京市自然科学基金资助项目(1082001).
作者简介：王 术(1968－)，男，河南淅川人，教授，博士生导师.

记 $\Phi_0=\Phi(t=0)$是如下椭圆系统的解

$$\begin{cases}\Delta\Phi(t=0)=n_0-b(x)\\ \left.\dfrac{\partial\Phi(t=0)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right|_{\partial\Omega}=0\\ \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega\Phi(x,t=0)\,dx=0\end{cases}\tag{5}$$

NSP模型 (1)～(3)能被写成如下形式的带非线性源项的 Navier-Stokes方程

$$\begin{cases}n_t+\nabla\cdot(nu)=0\\ u_t+(u\cdot\nabla)u+\nabla h(n)=\nabla\Phi+\dfrac{\varepsilon\Delta u}{n}\\ \nabla\Phi=\nabla\Phi(t=0)-\nabla(-\Delta)^{-1}\nabla\cdot\displaystyle\int_0^t nu(s)\,ds\end{cases}\tag{6}$$

其中 $(-\Delta)^{-1}$表示带着零平均以及 Neumann边界条件的 $-\Delta$的逆算子，使用椭圆算子的正则性理论和 NS方程局部光滑解的存在性和唯一性理论，可得 NSP方程组初边值问题 (1)～(3)的局部存在唯一性结果.

∂表示关于 x和 t求 $|\partial|$阶导数，$\|\cdot\|$表示关于空间变量 x的 L^2范数.

命题 1　(局部存在唯一性) 假设 $b(x)=B>0$(B为正常数)，Ω是 R^3中的光滑有界区域. $h:(0,\infty)\to(0,\infty)$，并且 $h(\cdot)>0$, $h'(\cdot)>0$,则存在仅依赖于 B的正常数 δ使得如果初始条件 (n_0,u_0)满足

$$\sum_{|\partial|\leqslant3}\|\partial n_0-\partial B\|+\sum_{|\partial|\leqslant3}\|\partial u_0\|\leqslant\delta$$

以及 $\Phi_0=\Phi(t=0)$满足式 (5)，则模型 (1)～(3)存在唯一的光滑解 (n,u,Φ)，满足

$$n,u,\Phi\in C^1(\Omega\times[0,T_{\max}))$$

$$n(x,t)-B,\ u(x,t),\ \Phi(x,t)\in L^\infty(0,T;H^3(R^3))$$

定义解的最大存在区间为 $[0,T_{\max})$，$T_{\max}>0$. 并且如果 $T_{\max}<\infty$，则

$$\sum_{|\partial|\leqslant3}\|\partial n(t,\cdot)-\partial B\|+\sum_{|\partial|\leqslant3}\|\partial u(t,\cdot)\|+\int_0^t\sum_{|\partial|\leqslant3}(\|\partial n(\tau,\cdot)-\partial B\|+\|\partial u(\tau,\cdot)\|)\,d\tau\to\infty,\quad t\to T_{\max}$$

定理 2　在命题 1的假设下，模型 (1)～(3)存在唯一的整体光滑解 (n,u,Φ)，而且存在正常数 C和 γ使得

$$\sum_{|\partial|\leqslant3}\|\partial n(t,\cdot)-\partial B\|+\sum_{|\partial|\leqslant3}\|\partial u(t,\cdot)\|\leqslant Ce^{-\gamma t}\left\{\sum_{|\partial|\leqslant3}\|\partial n_0-\partial B\|+\sum_{|\partial|\leqslant3}\|\partial u_0\|\right\}$$

2　定理 2的证明

本节考虑带初边值条件 (2)、(3)的 Navier-Stokes-Poission模型 (1)的解的大时间渐近性，主要运用经典能量方法和对称算子方法分步证明定理 2.

令 $\sigma(t,x)=n(t,x)-B$，则 (σ,u,Φ)满足下列系统

$$\begin{cases}\sigma_t+\nabla\cdot([\sigma+B]u)=0 & \text{(7a)}\\ u_t+u\cdot\nabla u+\nabla(h(\sigma+B)-h(B))=\nabla\Phi+\dfrac{\varepsilon\Delta u}{\sigma+B} & \text{(7b)}\\ \Delta\Phi=\sigma & \text{(7c)}\end{cases}$$

式中 $u=(u^i)_{1\leqslant i\leqslant3}$，因此有

$$\begin{cases}\sigma_t+\sigma_{,i}u^i+[\sigma+B]u^i_{,i}=0\\ u^i_t+u^ju^i_{,j}+\{h(\sigma+B)-h(B)\}_{,i}-\dfrac{\varepsilon u^i_{,jj}}{\sigma+B}=\Phi_{,i}\\ \Phi_{,ii}=\sigma\end{cases}\tag{8}$$

令 $q=h'$，则有

$$\{h(\sigma+B)-h(B)\}_{,i}=q(\sigma+B)\sigma_{,i}$$

记 $\Phi_{,i}=\Delta^{-1}\sigma_{,i}$，把式(8)写为矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\sigma_t\\u_t^1\\u_t^2\\u_t^3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u^1&B+\sigma&0&0\\q(B+\sigma)&u^1&0&0\\0&0&u^1&0\\0&0&0&u^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{,1}\\u_{,1}^1\\u_{,1}^2\\u_{,1}^3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u^2&0&B+\sigma&0\\0&u^2&0&0\\q(B+\sigma)&0&u^2&0\\0&0&0&u^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{,2}\\u_{,2}^1\\u_{,2}^2\\u_{,2}^3\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}u^3&0&0&B+\sigma\\0&u^3&0&0\\0&0&u^3&0\\q(B+\sigma)&0&0&u^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{,3}\\u_{,3}^1\\u_{,3}^2\\u_{,3}^3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-\frac{\varepsilon}{B+\sigma}\Delta u^1-\Delta^{-1}\sigma_{,1}\\-\frac{\varepsilon}{B+\sigma}\Delta u^2-\Delta^{-1}\sigma_{,2}\\-\frac{\varepsilon}{B+\sigma}\Delta u^3-\Delta^{-1}\sigma_{,3}\end{bmatrix}=0 \tag{9}$$

记 $w=\begin{bmatrix}\sigma\\u\end{bmatrix}$，对式(9)左乘对称算子 $D=\mathrm{diag}[q(\sigma+B),\sigma+B,\sigma+B,\sigma+B]$，则可得

$$Dw_t+A^1w_{,1}+A^2w_{,2}+A^3w_{,3}+L=0 \tag{10}$$

其中

$$A^1=\begin{bmatrix}u^1q(B+\sigma)&(B+\sigma)q(B+\sigma)&0&0\\(B+\sigma)q(B+\sigma)&(B+\sigma)u^1&0&0\\0&0&(B+\sigma)u^1&0\\0&0&0&(B+\sigma)u^1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}u^2q(B+\sigma)&0&(B+\sigma)q(B+\sigma)&0\\0&(B+\sigma)u^2&0&0\\(B+\sigma)q(B+\sigma)&0&(B+\sigma)u^2&0\\0&0&0&(B+\sigma)u^2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}u^3q(B+\sigma)&0&0&(B+\sigma)q(B+\sigma)\\0&(B+\sigma)u^3&0&0\\0&0&(B+\sigma)u^3&0\\(B+\sigma)q(B+\sigma)&0&0&(B+\sigma)u^3\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}0\\-\varepsilon\Delta u^1-(B+\sigma)\Delta^{-1}\sigma_{,1}\\-\varepsilon\Delta u^2-(B+\sigma)\Delta^{-1}\sigma_{,2}\\-\varepsilon\Delta u^3-(B+\sigma)\Delta^{-1}\sigma_{,3}\end{bmatrix}$$

定义范数 $|||w(t)|||^2=\sum_{|\alpha|\leqslant 3}\|\partial^\alpha w(t)\|^2$. 注意到(记 $q=q(\sigma+B)$，$n=\sigma+B$)

$$-\frac{1}{2}A^i_{,i}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\{u^iq\}_{,i}&-\frac{1}{2}\{nq\}_{,1}&-\frac{1}{2}\{nq\}_{,2}&-\frac{1}{2}\{nq\}_{,3}\\-\frac{1}{2}\{nq\}_{,1}&-\frac{1}{2}\{nu^i\}_{,i}&0&0\\-\frac{1}{2}\{nq\}_{,2}&0&-\frac{1}{2}\{nu^i\}_{,i}&0\\-\frac{1}{2}\{nq\}_{,3}&0&0&-\frac{1}{2}\{nu^i\}_{,i}\end{bmatrix}$$

此矩阵为对称矩阵，因此，对于任意向量 v，有

$$\left| v\cdot\left(-\frac{1}{2}A^i_{,i}\right)v\right|\leqslant C|||w|||\cdot|v|^2 \tag{11}$$

记 $E(t)=\int_\Omega\frac{1}{2}\{B|u|^2+|\nabla\Phi|^2+h'(B)\sigma^2\}dx$

引理 3　下面经典能量估计式成立

$$\frac{d}{dt}E(t)+\varepsilon\int_\Omega|\nabla u|^2\leqslant C|||w|||^3 \tag{12}$$

证明　对式(8)内积 nu并积分得

$$\int\left\{nu\cdot u_t+nu\cdot(u\cdot\nabla u)+nu\cdot\nabla\{h(B+\sigma)-h(B)\}-nu\cdot\nabla\Phi-nu\cdot\frac{\varepsilon\Delta u}{B+\sigma}\right\}dx=0$$

其中

$$\int_\Omega nu\cdot u_t dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega n|u|^2dx$$

$$\int_\Omega nu\cdot(u\cdot\nabla u)=-\frac{1}{2}\int_\Omega\sigma_t|u|^2dx$$

$$\int_\Omega -nu\cdot\nabla\Phi dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla\Phi|^2dx$$

$$\int_\Omega nu\cdot\nabla\{h(\sigma+B)-h(B)\}dx=\frac{d}{dt}\int_\Omega\int_0^\sigma\{h(s+B)-h(B)\}dsdx$$

$$\int_\Omega -nu\cdot\frac{\varepsilon\Delta u}{n}dx=\varepsilon\int_\Omega|\nabla u|^2dx$$

因此有

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}n|u|^2+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+\int_0^\sigma\{h(s+B)-h(B)\}ds\right\}dx+\frac{1}{2}\int_\Omega\sigma_t|u|^2dx+\varepsilon\int|\nabla u|^2dx=0$$

由于

$$\int_0^\sigma\{h(s+B)-h(B)\}dsdx\leqslant h'(B+\theta\sigma)\sigma^2$$

其中 $0<\theta<1$，则在稳态解 [B，0，0]附近即得式(12)．

经典能量估计不能推广到高阶导数，下面使用对称算子法来估计 w的高阶导数．

引理 4　让 $|||w(t)|||\leqslant\delta$充分小，则存在一个正常数 $C>0$，使得对于 $k=0,1,2,3$有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\{\partial_t^k w\cdot D\partial_t^k w+|\nabla\partial_t^k\Phi|^2\}dx+\varepsilon\int_\Omega|\partial_t^k\nabla u|^2dx\leqslant C|||w|||^3 \tag{13}$$

证明　由引理 3知 $k=0$时式(13)成立，现估计 $\partial_t^k w(k=1,2,3)$，对方程(10)求 ∂_t^k，得

$$D\{\partial_t^k w\}_t+\sum_{j=1}^3A^j\{\partial_t^k w\}_{,j}+\begin{bmatrix}0\\-\varepsilon\partial_t^k\Delta u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\\partial_t^k\{n\nabla\Delta^{-1}\sigma\}\end{bmatrix}=$$

$$-\sum_{l\neq0}\binom{l}{k}\{\partial_t^l D\partial_t^{k-1}w_t-\partial_t^l A\partial_t^{k-1}w_{,j}\} \tag{14}$$

式(14)两边同乘以 $\partial_t^k w$并在 Ω上积分．首先处理式子左边，第 1项为

$$\int_\Omega\partial_t^k w\cdot D\{\partial_t^k w\}_t=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\partial_t^k w\cdot D\partial_t^k w-\frac{1}{2}\int_\Omega\partial_t^k w\cdot D_t\partial_t^k w=$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\partial_t^k w\cdot D\partial_t^k w+O(|||w|||^3)$$

第 2项为

$$\partial_t^k w\cdot\sum A^j\{\partial_t^k w\}_{,j}=\frac{1}{2}\left[\partial_t^k w\cdot\sum A^j\{\partial_t^k w\}\right]_{,j}-\frac{1}{2}\partial_t^k w\cdot\sum A^j_{,j}\partial_t^k w$$

其中

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\left[\partial_t^k w\cdot\sum A^j(\partial_t^k w)\right]_{,j}=\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}\partial_t^k w\cdot\sum A^j\nu_j(\partial_t^k w)\,ds=0$$

因此，由式(11)知

$$\int_\Omega \partial_t^k w\cdot\sum A^j(\partial_t^k w)_{,j}\leqslant C|||w|||^3$$

第3项为

$$\int_\Omega \partial_t^k u\cdot(-\varepsilon\,\partial_t^k\Delta u)=\varepsilon\int_\Omega|\partial_t^k\Delta u|^2$$

第4项为

$$-\int_\Omega \partial_t^k u\cdot\partial_t^k(n\nabla\Delta^{-1}\sigma)=-\int_\Omega \partial_t^k un\cdot\nabla\Delta^{-1}\partial_t^k\sigma-\sum_{l=1}^{k}\int_\Omega\partial_t^k u\cdot\partial_t^l\sigma\Delta^{-1}\partial_t^{k-l}\sigma=$$
$$-\int_\Omega\partial_t^k(un)\cdot\nabla\Delta^{-1}\partial_t^k\sigma+\sum_{l\neq 0}\left\{\int_\Omega\partial_t^{k-l}u\cdot\partial_t^l\sigma\nabla\Delta^{-1}\partial_t^k\sigma-\int_\Omega\partial_t^k u\cdot\partial_t^l\sigma\Delta^{-1}\partial_t^{k-l}\sigma\right\} \tag{15}$$

式(15)第2项被 $C|||w|||^3$ 控制.

$$-\int_\Omega\partial_t^k(un)\cdot\nabla\Delta^{-1}\partial_t^k\sigma=-\int_\Omega\partial_t^{k+1}\sigma\cdot\Delta^{-1}\partial_t^k\sigma=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla\partial_t^k\Phi|^2$$

其次处理式子右边项，由于 $l>0$，由3D中的Sobolev嵌入知式子右边项的 L^2 范数被 $C|||w|||^2$ 控制，因此得到结论.

下面做混合导数的估计.

引理 5 让 ∂ 表示至多2阶混合导数，则对使得 $|||w|||$ 充分小的模型(1)～(3)的任意解 (σ,u) 有

$$\|\partial(\nabla\times u)(t)\|^2\leqslant|||w(0)|||^2+C\int_0^t|||w(s)|||^3ds \tag{16}$$

证明 现估计 u 的旋度，令 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times u$，$\nabla\times$ 式(8)得

$$\boldsymbol{\omega}_t+\nabla\times[(u\cdot\nabla)u]=\nabla\times\left[\frac{\varepsilon\Delta u}{n}\right]$$

其中

$$\nabla\times[(u\cdot\nabla)u]=-(u\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}+(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)u$$
$$\nabla\times\left[\frac{\varepsilon\Delta u}{n}\right]=\frac{\varepsilon}{n}\Delta\boldsymbol{\omega}+\nabla\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)\times\Delta u \tag{17}$$

对式(17)求至多二阶混合导数 ∂，两边同乘以 $\partial\boldsymbol{\omega}$ 并积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial\boldsymbol{\omega}(t)\|^2\leqslant C|||w|||^3 \tag{18}$$

对式(18)从0到 t 积分便得结论.

引理 6 若 (σ,u) 是使得 $|||w|||$ 充分小的模型(1)～(3)的解，则存在一个正常数 c_0 使得

$$c_0|||w(t)|||^2\leqslant\sum_{j\leqslant 3}\int_\Omega\partial_t^j w\cdot D\,\partial_t^j w\,dx+|||w(0)|||^2+C\int_0^t|||w(s)|||^3ds \tag{19}$$

证明 由式(8)得

$$\nabla(q(B)\sigma)-\nabla\Phi=-u_t-(u\cdot\nabla)u-\nabla(h(\sigma+B)-h(B)-q(B)\sigma)+\frac{\varepsilon\Delta u}{\sigma+B} \tag{20}$$

对式(20)两边乘以 $\nabla(q(B)\sigma)$，左式为

$$\int_\Omega|\nabla(q(B)\sigma)|^2+\int_\Omega\Delta\Phi q(B)\sigma=\int_\Omega|\nabla(q(B)\sigma)|^2+\int_\Omega q(B)\sigma^2$$

由方程(7)得

$$\nabla\cdot u=-\frac{1}{B+\sigma}(\sigma_t+\nabla\sigma\cdot u) \tag{21}$$

注意到式(20)、(21)右边项均被 u_t、σ_t 和 u 控制，因此，对 $|||w|||\leqslant\delta$ 充分小，得

$$\|\sigma\|^2+\|\nabla\sigma\|^2+\|\nabla\cdot u\|^2\leqslant C(\|u_t\|^2+\|\sigma_t\|^2+\|u\|^2+|||w|||^3)$$

对式(20)、(21)关于 t求导，显然每个时间导数到$\nabla\sigma$和$\nabla\cdot u$二阶均被$\sum_{j\leqslant 3}\int_\Omega \partial_t^j w\cdot D\partial_t^j w\mathrm{d}x$控制. 关于 x导数类似，因此结合引理 6即得结论.

下面说明使得$|||w|||$充分小的模型(1)～(3)的解(σ,u)，$|||w(t)|||^2$被$\sum_{j=0}^{3}\|\partial_t^j\nabla u(t)\|^2$控制.

引理 7　对使得$|||w|||$充分小的模型(1)～(3)的任意解(σ,u)有

$$\sum_{j=0}^{2}\{\|\partial_t^j\sigma\|^2+\|\partial_t^j\nabla\Phi\|^2+\|\partial_t^j\nabla\sigma\|^2\}\leqslant C\left\{\sum_{j=0}^{3}\|\partial_t^j\nabla u\|^2+C|||w|||^3\right\}\tag{22}$$

证明　对式(20)关于$-\nabla\Phi$做内积，结合已知条件$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}=0$，方程左边为

$$-\int_\Omega\nabla\Phi\cdot\nabla\{q(B)\sigma\}+\int_\Omega|\nabla\Phi|^2=\int_\Omega\{\Delta\Phi\}\{q(B)\sigma\}+\int_\Omega|\nabla\Phi|^2=\int_\Omega q(B)\sigma^2+\int_\Omega|\nabla\Phi|^2$$

另一方面，式(20)右边中间 2项的 L^2 范数被 $C|||w|||^2$控制. 因此可得

$$\|\sigma\|+\|\nabla\Phi\|\leqslant C\|\nabla u_t\|+C\|\nabla u\|+C|||w|||^2$$

由式(20)得

$$\|\nabla\sigma\|\leqslant C\{\|\nabla\{q(B)\sigma\}\|+\|\sigma\|\}\leqslant C\|\nabla u_t\|+C\|\nabla u\|+C|||w|||^2$$

为了估计σ_t，对式(20)关于 t求导

$$\nabla\{q(B)\sigma_t\}-\nabla\Phi_t=-u_{tt}-[(u\cdot\nabla)u-\nabla\{h(\sigma+B)-h(B)-q(B)\sigma\}]_t+\left\{\frac{\varepsilon\Delta u}{\sigma+B}\right\}_t$$

重复以上步骤，便得

$$\|\sigma_t\|+\|\nabla\Phi_t\|+\|\nabla\sigma_t\|\leqslant C\{\|\nabla u_t\|+\|\nabla u_{tt}\|+C|||w|||^2\}$$

关于时间 t再求一次导数，重复以上步骤，便得结论.

引理 8　存在$\delta>0$，$C>0$，使得如果(σ,u)是使$|||w|||\leqslant\delta$的模型(1)～(3)的解，则有

$$|||w(t)|||^2\leqslant C\sum_{j=0}^{3}\|\partial_t^j\nabla u\|^2+C|||w(0)|||^2+C\int_0^t|||w(s)|||^3\mathrm{d}s+$$
$$C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega q(B)\Delta\sigma_t\sigma_{tt}\mathrm{d}x\tag{23}$$

证明　由式(22)得到了σ和$\nabla\sigma$的 L^2 估计，由式(16)得到了$\nabla\times u$的估计，显然式(21)右边的 L^2 范数被$C\{\|\sigma_t\|+\|u\|\}$控制，因此完成了 w的一阶估计.

下面考虑 w的二阶导数，由式(15)、(22)得到了u_{tt}、σ_{tt}、$\nabla\sigma_t$和$\nabla\times u_t$的估计.

为了估计$\nabla\cdot u_t$，对方程式(7)关于 t求导

$$(B+\sigma)\nabla\cdot u_t=-\sigma_{tt}-\nabla(B+\sigma)\cdot u_t-\nabla\sigma_t\cdot u-\sigma_t(\nabla\cdot u)\tag{24}$$

式(24)右边的 L^2 范数被$C\sum_{j=0}^{2}\|\partial_t^j\nabla u\|+C|||w|||^2$控制.

为了估计$\Delta\sigma$，由$\nabla\cdot$式(8)得

$$\Delta\{h(\sigma+B)-h(B)\}-\sigma=-\nabla\cdot u_t-\nabla\cdot\{u\nabla\cdot u\}+\nabla\cdot\left(\frac{\varepsilon\Delta u}{\sigma+B}\right)$$

由于$\Delta\{h(\sigma+B)-h(B)\}=q(\sigma+B)\Delta\sigma+\nabla\{q(\sigma+B)\}\cdot\nabla\sigma$，因此有

$$q(\sigma+B)\Delta\sigma=-\nabla\{q(\sigma+B)\}\cdot\nabla\sigma+\sigma-\nabla\cdot u_t-\nabla\cdot\{u\cdot\nabla u\}+\nabla\cdot\left(\frac{\varepsilon\Delta u}{\sigma+B}\right)\tag{25}$$

和前面讨论类似，式(25)右边的 L^2 范数被$C\sum_{j=0}^{2}\|\partial_t^j\nabla u\|+C|||w|||$控制.

下面来估计二阶导数项中的最后一项$\nabla(\nabla\cdot u)$，由式(21)得

$$\nabla(\nabla\cdot u)=-\nabla\left[\frac{1}{(B+\sigma)}\{\sigma_t+\nabla\sigma\cdot u\}\right]=-\frac{1}{(B+\sigma)}\{\nabla\sigma_t+\nabla[\nabla\sigma\cdot u]\}+\frac{\nabla\sigma}{(B+\sigma)^2}\{\sigma_t+\nabla\sigma\cdot u\}\tag{26}$$

因此，$\nabla(\nabla\cdot u)$的 L^2 范数被 $C\sum_{j=0}^{3}\|\partial_t^j\nabla u\|+C|||w|||^2$ 控制，结合引理 4即得到所有的二阶导数项的估计.

由式(15)、(21)得到了$\nabla\sigma_{tt}$和$\partial_t^2\nabla\times u$的估计，对式(25)关于 t求导可得$\nabla(\nabla\cdot u)_t$的估计，其中包括所有的 $u_{t,ijk}$, $1\leqslant i, j\leqslant 3$估计. 对方程(24)求梯度可知$\|\nabla^3\sigma\|_{L^2}$被式(23)右边项所控制.

下面估计 σ_{ttt}, 由∂式(7a)$-B\nabla\cdot$式(7b)得

$$\sigma_{tt}-B\nabla\cdot\{q\nabla\sigma\}=B(\Delta q)\sigma-B\sigma-\{\nabla\cdot(\sigma u)\}_t+B\nabla\cdot\{(\nabla\cdot u)u\}-B\nabla\cdot\left(\frac{\varepsilon\Delta u}{n}\right)-B\Delta Q_2\tag{27}$$

其中 $Q_2\equiv Q(B+\sigma)-Q(B)-q(B)\sigma,\quad q=Q'$

对式(27)关于 t求导，得

$$\sigma_{ttt}-B\nabla\cdot\{q\nabla\sigma_t\}=\partial_t\left[B(\Delta q)\sigma-B\sigma-\{\nabla\cdot(\sigma u)\}_t+B\nabla\cdot\{(\nabla\cdot u)u\}-B\nabla\cdot\left(\frac{\varepsilon\Delta u}{n}\right)-B\Delta Q_2\right]\equiv Z\tag{28}$$

显然，Z的 L^2 范数被 $C\left\{\sum_{j=0}^{3}\|\partial_t^j\nabla u(t)\|\right\}+C|||w|||^2$ 控制.

式(28)两边同乘以 σ_{ttt}, 得

$$\sigma_{ttt}^2=\{B\nabla\cdot[q\nabla\sigma_t]\sigma_{tt}\}_t-\nabla\cdot\{Bq\nabla\sigma_{tt}\sigma_{tt}\}+q\nabla\sigma_{tt}\cdot\nabla\{B\sigma_{tt}\}+Z\sigma_{ttt}\tag{29}$$

现只需处理式(29)右端的中间 2项. 由式(22)知，积分第 3项被 $C\left\{\sum_{j=0}^{3}\|\partial_t^j\nabla u(t)\|^2\right\}+C|||w|||^2$ 控制.

另一方面，由方程(7b)和边界条件 $u|_{\partial\Omega}=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}=0$得

$$0=v\cdot\left\{u_t+(u\cdot\nabla)u+\nabla[q\sigma+Q_2]-\nabla\Phi-\frac{\varepsilon\Delta u}{n}\right\}=v_iu^ju^i_j+\nabla\{q\sigma+Q_2\}\cdot v=u^j\partial_j(v\cdot u)-u^ju^iv_{i\,j}+q\nabla\sigma\cdot v+(v\cdot\nabla q)\sigma+v\cdot\nabla Q_2$$

严拓 v到 Ω中，得

$$q\nabla\sigma\cdot v=\sum u^ju^iv_{i\,j}-(v\cdot\nabla q)\sigma-v\cdot\nabla Q_2$$

式(29)右端第 2项积分为

$$-\int_\Omega\nabla\cdot\{Bq\nabla\sigma_{tt}\sigma_{tt}\}=-\int_{\partial\Omega}B\{q\nabla\sigma\cdot v\}_{tt}\sigma_{tt}ds=-\int_{\partial\Omega}B\{u^ju^iv_{i\,j}-(v\cdot\nabla q)\sigma-v\cdot\nabla Q_2\}_{tt}\sigma_{tt}ds$$

因此有

$$C\|w\|\cdot\{\|\sigma_{tt}\|+\|\nabla\sigma_{tt}\|\}\leqslant\varepsilon\|w\|^2+C_\varepsilon\{\|\sigma_{tt}\|+\|\nabla\sigma_{tt}\|\}+C|||w|||^3$$

其中 ε任意小，即完成了 σ_{ttt}的估计.

对式(21)求∂_t^2得到∇u_{tt}的估计. 进一步对式(25)关于 t求导得到 $\Delta\sigma_t$的估计. 最后，对式(21)求∂_{ij}^2得到 $u_{t,ijk}$的估计.

下面综合以上所有的分步估计式.

定理 9 模型(1)～(3)存在唯一的全局光滑解(σ, u)，而且存在常数 $C>0$, $\gamma>0$, 使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\infty}e^{\gamma t}|||w(t)|||\leqslant C|||w(0)|||$$

证明 对式(13)关于 k从 0到 3求和后所得的式子与式(23)乘以 α所得式子相加得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{3}\int_{\Omega}\{\partial_t^k w\cdot D\partial_t^k w+|\nabla\partial_t^k\Phi|^2\}dx+\alpha|||w(t)|||^2+(\varepsilon-C\alpha)\sum_{j=0}^{3}\|\partial_t^j\nabla u\|^2-$$

$$C\alpha\frac{d}{dt}\int_{\Omega}B\varphi\Delta\sigma_t\sigma_{tt}dx\leqslant C|||w(t)|||^3+C\alpha|||w(0)|||^2+C\alpha\int_0^t|||w(s)|||^3ds \tag{30}$$

其中 α为待定的小的正常数. 又有

$$\int_{\Omega}B\varphi\Delta\sigma_t\sigma_{tt}dx\leqslant C|||w|||^2$$

令

$$y(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3}\int_{\Omega}\{\partial_t^k w\cdot D\partial_t^k w+|\nabla\partial_t^k\Phi|^2\}dx-C\alpha\int_{\Omega}B\varphi\Delta\sigma_t\sigma_{tt}dx$$

现取 $\alpha<c_0/6C^2$, 由式 (19)得

$$y(t)\geqslant\frac{c_0}{3}|||w(t)|||^2-|||w(0)|||^2-\int_0^t|||w(s)|||^3ds \tag{31}$$

另一方面, 存在 $K>0$使得 $y(t)\leqslant K|||w(t)|||^2$, 则由式 (30)知

$$y'(t)+\frac{\alpha}{K}y(t)\leqslant C\left\{|||w(t)|||^3+|||w(0)|||^2+\int_0^t|||w(s)|||^3ds\right\}$$

式 (31)两边同乘以 $e^{\frac{\alpha}{K}t}$, 并从 0到 t积分, 令 $\gamma=\alpha/K<4/3$, 得

$$e^{\gamma t}y(t)\leqslant y(0)+C\left\{\int_0^t e^{\gamma\tau}|||w(\tau)|||^3+e^{\gamma\tau}|||w(0)|||^2+\right.$$
$$\left.\int_0^t e^{\gamma\tau}\int_0^\tau|||w(s)|||^3dsd\tau\right\}$$

结合式 (31)得

$$\frac{c_0}{2}e^{\gamma t}|||w(t)|||^2\leqslant C|||w(0)|||^2+C\int_0^t e^{\gamma\tau}|||w(\tau)|||^3d\tau+C\int_0^t e^{\gamma\tau}\int_0^\tau|||w(s)|||^3dsd\tau\leqslant$$

$$C|||w(0)|||^2+C\int_0^t e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}\{e^{\gamma\tau}|||w(\tau)|||^2\}^{\frac{3}{2}}d\tau+C\int_0^t e^{\gamma\tau}\int_0^\tau e^{-\frac{3\gamma\tau}{2}}\{e^{\gamma\tau}|||w(s)|||^2\}^{\frac{3}{2}}dsd\tau\leqslant$$

$$C|||w(0)|||^2+C\int_0^t e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}d\tau\times\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{e^{\gamma s}|||w(s)|||^2\}^{\frac{3}{2}}\leqslant$$

$$C|||w(0)|||^2+C\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\{e^{\gamma s}|||w(s)|||^2\}^{\frac{3}{2}}$$

由于 $|||w(0)|||$是小量, 则对于任意时间 t有

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}e^{\gamma s}|||w(s)|||^2\leqslant C|||w(0)|||^2$$

由局部存在性定理和此先验估计即得定理 2.

参考文献:

[1] WANG Shu. Qusineutral limit of Euler-Poisson system with and without viscosity[J]. Commun Part Diff Eqs, 2004, 29(3/4): 419-456.

[2] WANG Shu, JIANG Song. The convergence of the Navier-Stokes-Poisson system to the incompressible Euler equations[J]. Commun Part Diff Eqs, 2006, 31(4/6): 571-591.

[3] BESSE C, CLAUDEL J, DEGOND P, et al. A model hierarchy for ionospheric plasma modelling[J]. M3AS, 2004, 14(3): 393-415.

[4] HAO Cheng-chun, LI Hai-liang. Global existence for compressible Navier-Stokes-Poisson equations in three and higher dimensions[J]. J Differential Equations, 2009, 246(12): 4791-4812.

[5] DONATELLI D. Local and global existence for the coupled Navier-Stokes-Poisson problem[J]. Quart Appl Math, 2003, 61(2): 345-361.

[6] YIN Jun-ping, TAN Zhong. Local existence of the strong solutions for the full Navier-Stokes-Poisson equations[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(7/8): 2397-2415.

[7] DEGOND P, DELUZET F, SANGAM A, et al. An asymptotic preserving scheme for the Euler equations in a strong magnetic

field[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(10): 3540-3558.

[8] JU Qiang-chang, LI Fu-cai, LI Hai-liang. The quasineutral limit of compressible Navier-Stokes-Poisson system with heat conductivity and general initial data[J]. J Differential Equations, 2009, 247(1): 203-224.

[9] DUCOMET B, FEIREISL E, PETZELTOVA H, et al. Global in time weak solution for compressible barotropic self-gravitating fluids[J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2004, 11(1): 113-130.

[10] DUCOMET B, ZLOTNIK A. Stabilization and stability for the spherically symmetric Navier-Stokes-Poisson system[J]. Appl Math Lett, 2005, 18(10): 1190-1198.

[11] GUO Yan, WALTER S. Stability of semiconductor states with insulating and contact boundary conditions[J]. Arch Rational Mech Anal, 2006, 179(1): 1-30.

[12] HSIAO L, MARKOWICH P A, WANG Shu. The asymptotic behavior of globally smooth solutions of the multidimensional hydrodynamic model for semiconductors[J]. J Differential Equations, 2003, 192(1): 111-133.

Asymptotic Behavior of the Compressible Navier-Stokes-Poisson Equations

WANG Shu, ZHANG Li-li

(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The authors studied the large time asymptotical behaviors of the smooth solutions to the initial boundary value problems for the three dimensional compressible Navier-Stokes-Poisson equations in plasma physics. By using the classical energy methods, it is proved that there exists a unique global and smooth solution to the initial-boundary value problems for the 3D compressible Navier-Stokes-Poisson equations which converges to a stationary solution exponentially fast as $t\to\infty$ when the initial data is near its equilibrium.

Key words: plasma physics; Navier-Stokes-Poisson equations; asymptotical behavior

(责任编辑 梁 洁)