关于零状态、零输入以及稳态响应的线性关系的一般论证

陈大棓　贺春耕
（电工基础教研室）

摘　要

本文的论证分两个部分。第一部分通过状态变量法论证了线性网络的零状态响应及零输入响应的线性关系。第二部分讨论稳态响应的线性关系，在论证过程中提出了含有纯电容割集的网络及含有纯电感回路的网络为非衰减网络等几条定理，并进行了比较严谨的证明。

A General Demonstration of the Linearity of Zero–State, Zero–Input and Steady–State Responses

Chen Da-pei, He Chun-geng

Abstract

The demonstration includes two steps. Firstly, the linear relationship between zero-state and zero-input responses of linear networks is demonstraped. Then the linear relationship of steady state response is discussed. In the course of demonstration, several theorems are posed and proved in detail, such as networks including pure capacitance cut-sets and pure inductance loops are non-decaying, etc.

关于线性网络的零状态、零输入以及稳态响应的线性关系的一些结论是众所周知的。但很少看到对这些关系，特别是对稳态响应的线性关系有比较严谨的论证。本文通过状态变量法比较严密地、完整地论证了这些关系。

一、零状态响应、零输入响应、全响应

若用 X 表示状态变量，U 表示输入，Y 表示输出，则线性时变网络（时不变网络可视作时变网络的特例）的状态方程及其输出方程可表示为

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) \tag{1}$$

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t) \tag{2}$$

式中 $\mathbf{X}\in R^{n}$，$\mathbf{Y}\in R^{l}$，$\mathbf{U}\in R^{m}$，$\mathbf{A}(t)$ 为 $n\times n$ 时变系数矩阵；$\mathbf{B}(t)$ 为 $n\times m$ 时变系数矩阵；$\mathbf{C}(t)$ 为 $l\times n$ 时变系数矩阵；$\mathbf{D}(t)$ 为 $l\times m$ 时变系数矩阵。若 $\mathbf{A}(\cdot)$，$\mathbf{B}(\cdot)$，$\mathbf{U}(\cdot)$ 的元素是 t 的分段连续函数，则方程（1）满足（大范围）利普希茨条件，其解存在，故可从（1）式解得网络的状态为

$$\mathbf{X}(t)=\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{X}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau \tag{3}$$

将（3）代入（2）可得网络的响应为

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{X}(t_0)+\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t) \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{\phi}(t,\tau)$ 为 $n\times n$ 矩阵称为线性时变网络的状态转移矩阵，$\boldsymbol{\phi}(\cdot,\cdot)$：$R\times R\to R^{n\times n}$，$\mathbf{Y}(t)$ 称为网络的全响应矢量，$\mathbf{Y}(\cdot)$：$R\to R^{l}$（这里假定 $\mathbf{Y}$ 为 l 维的）。若用 $\mathbf{Y}_{os}(t)\in R^{l}$ 表示零状态响应，$\mathbf{Y}_{oi}(t)\in R^{l}$ 表示零输入响应，则由（4）可得

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{Y}_{oi}(t)+\mathbf{Y}_{os}(t) \tag{5}$$

式中

$$\mathbf{Y}_{oi}(t)=\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{X}(t_0) \quad \text{或}$$

$$\mathbf{Y}_{oi}(t)-\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{X}(t_0)=0 \tag{6}$$

$$\mathbf{Y}_{os}(t)=\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t) \quad \text{或}$$

$$\mathbf{Y}_{os}(t)-\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t)=0 \tag{7}$$

若引入积分微分算子：

$$\mathbf{n}: R^{l}\times R^{n}\times R^{n}\to R^{l},\quad \mathbf{n}_1: R^{l}\times R^{n}\to R^{l},\quad \mathbf{n}_2: R^{l}\times R^{m}\to R^{l}$$

则由（6）、（7）有

$$\mathbf{n}_1[\mathbf{Y}_{oi}(t);\quad \mathbf{X}(t_0)]=0 \tag{8}$$

$$\mathbf{n}_2[\mathbf{Y}_{os}(t);\quad \mathbf{U}(t)]=0 \tag{9}$$

若 $\mathbf{X}_{oi}(t)$ 是关于初始状态的线性函数，则 $\mathbf{n}_1$ 是线性运算子。反之亦然。若 $\mathbf{Y}_{os}(t)$ 是关于输入的线性函数则，$\mathbf{n}_2$ 是线性运算子，反之亦然。

所谓运算子是线性的，是指运算子既存在齐次性又存在可加性。运算子存在齐次性的意义是指：

当 $\mathbf{n}(\mathbf{Y};\ \mathbf{X})=0$ 时，一定有 $\mathbf{n}(\mathbf{Y}^{(1)}=\alpha\mathbf{Y};\ \mathbf{X}^{(1)}=\alpha\mathbf{X})=0$，式中 α 为纯数。

运算子存在可加性的意义是指：

当 $\mathbf{n}(\mathbf{Y}^{(1)};\ \mathbf{X}^{(1)})=0$；$\mathbf{n}(\mathbf{Y}^{(2)};\ \mathbf{X}^{(2)})=0$ 时，一定有

$$\mathbf{n}(\mathbf{Y}^{(1)}+\mathbf{Y}^{(2)};\ \mathbf{X}^{(1)}+\mathbf{X}^{(2)})=0$$

1. 零输入响应是初始状态的线性函数

下面证明 $\mathbf{n}_1$ 是线性算子。对 $\mathbf{n}_1$ 来说，若（8）式成立，则当初始状态的值增加 α 倍即 $\mathbf{X}^{(1)}(t_0)=\alpha\mathbf{X}(t_0)$ 时，由（6）式有

$$\mathbf{Y}_{oi}^{(1)}(t)=\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\alpha\mathbf{X}(t_0)=\alpha\mathbf{Y}_{oi}(t) \tag{10}$$

故有

$$\mathbf{n}[\mathbf{Y}_{oi}^{(1)}(t)=\alpha\mathbf{Y}_{oi}(t);\ \mathbf{X}^{(1)}(t_0)=\alpha\mathbf{X}(t_0)]=0 \tag{11}$$

说明 $\mathbf{n}_1$ 存在齐次性。$\mathbf{n}_1$ 存在可加性，可证明如下。

若当初始条件为 $\mathbf{X}^{(1)}(t_0)$ 时，由（6）式可得输出：

$$\mathbf{Y}_{oi}^{(1)}(t)=\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{X}^{(1)}(t_0) \tag{12}$$

而当初始条件为 $\mathbf{X}^{(2)}$ 时，则输出为 $\mathbf{Y}_{oi}^{(2)}(t)=\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)X^{(2)}(t_0)$ (13)

当初始条件为 $\mathbf{X}^{(2)}(t_0)+\mathbf{X}^{(2)}(t_0)$ 时，从（6）式可得输出为：

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{oi}(t)&=\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)[\mathbf{X}^{(1)}(t_0)+\mathbf{X}^{(2)}(t_0)]\\&=\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{X}^{(1)}(t_0)+\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{X}^{(2)}(t_0)\\&\mathbf{Y}_{oi}^{(1)}(t)+\mathbf{Y}_{oi}^{(2)}(t)\end{aligned} \tag{14}$$

故有

$$\mathbf{n}_1[\mathbf{Y}_{oi}(t)=\mathbf{Y}_{oi}^{(1)}(t)+\mathbf{Y}_{oi}^{(2)}(t);\ \mathbf{X}^{(1)}(t_0)+\mathbf{X}^{(2)}(t_0)]=0 \tag{15}$$

说明 $\mathbf{n}_1$ 也存在可加性。

这就说明了 $\mathbf{n}_1$ 既满足齐次性又满足可加性，而 $\mathbf{n}_1$ 是一线性算子，即证明了零输入响应是初始状态的线性函数。

2. 零状态响应是输入的线性函数

下面证明 $\mathbf{n}_2$ 也是一线性算子。先证齐次性，若（9）式成立，则当输入增加 α 倍时，即 $\mathbf{U}^{(1)}(t)=\alpha\mathbf{U}(t)$ 时由（7）式有

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{os}^{(1)}(t)&=\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\alpha\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\alpha\mathbf{U}(t)\\&=\alpha\left\{\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t)\right\}\\&=\alpha\mathbf{Y}_{os}(t)\end{aligned} \tag{16}$$

故有

$$\mathbf{n}_2[\mathbf{Y}_{os}^{(1)}(t)=\alpha\mathbf{Y}_{os}(t);\quad \mathbf{U}^{(1)}(t)=\alpha\mathbf{U}(t)]=0 \tag{17}$$

说明 $\mathbf{n}_2$ 存在齐次性，再证 $\mathbf{n}_2$ 存在可加性。

如果输入为 $\mathbf{U}^{(1)}(t)$ 时输出由（7）式为

$$\mathbf{Y}_{os}^{(1)}(t)=\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}^{(1)}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\mathbf{U}^{(1)}(t) \tag{18}$$

而当输入为 $\mathbf{U}^{(2)}(t)$ 时输出由（7）式为

$$\mathbf{Y}_{os}^{(2)}(t)=\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}^{(2)}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\mathbf{U}^{(2)}(t) \tag{19}$$

当输入为 $\mathbf{U}(t)=\mathbf{U}^{(1)}(t)+\mathbf{U}^{(2)}(t)$ 时，输出由（7）式可得：

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{os}(t)&=\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)[\mathbf{U}^{(1)}(\tau)+\mathbf{U}^{(2)}(\tau)]d\tau+\mathbf{D}(t)[\mathbf{U}^{(1)}(t)+\mathbf{U}^{(2)}(t)]\\&=\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{n}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}^{(1)}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\mathbf{U}^{(1)}(t)\\&\quad+\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}^{(2)}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\mathbf{U}^{(2)}(t)\end{aligned}$$

$$=\mathbf{Y}_{os}^{(1)}(t)+\mathbf{Y}_{os}^{(2)} \tag{20}$$

故有

$$\mathbf{n}_2[\mathbf{Y}_{os}(t)=\mathbf{Y}_{os}^{(1)}(t)+\mathbf{Y}_{os}^{(2)}(t);\quad \mathbf{U}(t)=\mathbf{U}^{(1)}(t)+\mathbf{U}^{(2)}(t)]=0 \tag{21}$$

说明 $\mathbf{n}_2$ 又存在可加性。

这样就证明了 $\mathbf{n}_2$ 既满足齐次性又满足可加性，而 $\mathbf{n}_2$ 是一线性算子，即证得零状态响应是输入的线性函数。

3. 全响应既不是初始状态的线性函数也不是输入的线性函数。

若（4）式成立，当初始条件增加 α 倍，即 $\mathbf{X}^{(1)}(t_0)=\alpha\mathbf{X}(t_0)$，而输入维持原来情况时，有

$$\mathbf{Y}^{(1)}(t)=\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\alpha\mathbf{X}(t_0)+\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t)$$
$$\neq\alpha\mathbf{Y}(t)$$

即当 $\mathbf{n}[\mathbf{Y}(t);\ \mathbf{X}(t_0)]=0$ 时，$\mathbf{n}[\mathbf{Y}(t);\ \alpha\mathbf{X}(t_0)]\neq0$，说明全响应不存在关于初始状态的齐次性，从而证明全响应不是初始状态的线性函数。

又，当输入增加 α 倍时，即 $\mathbf{U}^{(1)}(t)=\alpha\mathbf{U}(t)$ 时，而初始状态维持原来情况时，有

$$\mathbf{Y}^{(1)}(t)=\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\mathbf{X}(t_0)+\mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\alpha\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\alpha\mathbf{U}(t)$$
$$\neq\alpha\mathbf{Y}(t) \tag{23}$$

即当 $\mathbf{n}[\mathbf{Y}(t);\ \mathbf{U}(t)]=0$ 时，$\mathbf{n}[\mathbf{Y}(t);\ \alpha\mathbf{U}(t)]\neq0$

可见全响应不存在关于输入的齐次性，从而说明了全响应也不是输入的线性函数。

这样就证明了线性网络的全响应既不是初始状态的线性函数也不是输入的线性函数。

二、线性时不变网络的稳态响应

1. 所谓线性时不变网络的稳态响应，是指该网络在 $t\to\infty$ 时的全响应，即

$$\mathbf{Y}_{稳}=\lim_{t\to\infty}\ \mathbf{Y}_{全}=\lim_{t\to\infty}(\mathbf{Y}_{oi}+\mathbf{Y}_{os})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[\mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}(t_0)+\mathbf{C}\int_{t_0}^{t}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{D}\mathbf{U}(t)\right]$$
$$=\lim_{t\to\infty}\ \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}(t_0)+\lim_{t\to\infty}\left[\mathbf{C}\int_{t_0}^{t}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{D}\mathbf{U}(t)\right. \tag{24}$$

如果

$$\lim_{t\to\infty}\ \mathbf{Y}_{oi}=\lim_{t\to\infty}\ \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}(t_0)\longrightarrow0 \tag{25}$$

则 $\mathbf{Y}_{稳}$ 是 $\mathbf{Y}_{os}$ 的一部分，即 $\mathbf{Y}_{稳}\in\mathbf{Y}_{os}$ 由于 $\mathbf{Y}_{os}$ 是输入的线性函数，所以在这种情况下 $\mathbf{Y}_{稳}$

也是输入的线性函数。

$\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{Y}_{oi}$是否趋于0，决定于$e^{\mathbf{A}(t)}$的性质。

$$e^{\mathbf{A}(t)}=\alpha_0(t)\mathbf{A}^0+\alpha_1(t)\mathbf{A}^1+\alpha_2(t)\mathbf{A}^2+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1} \tag{26}$$

式中的 $\alpha_j(\cdot)$ ($j=0,1,2,\cdots n-1$) 是关于 t 的标量函数，n 表示网络的阶数。当 $\mathbf{A}$ 的特征方程不存在重根时，$\alpha(\cdot)$ 可由下列方程确定（见参考文献[5]）。

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t)} \\ e^{\lambda_2(t)} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n(t)} \end{pmatrix} \tag{27}$$

其中 $\lambda_i(i=1,\ 2\cdots n)$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值。

若用 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 表示此 $n\times n$ 矩阵$e^{\mathbf{A}(t)}$（由（26）可看出）则有

$$e^{\mathbf{A}(t)}\triangleq\boldsymbol{\phi}(t)=[\boldsymbol{\phi}_{ij}] \tag{28}$$

从（27）式求出 $\alpha_j(\cdot)(j=0,1,2\cdots n-1)$ 代入（26）可得。

$$\boldsymbol{\phi}_{ij}=b_1^{ij}e^{\lambda_1 t}+b_2^{ij}e^{\lambda_2 t}+\cdots+b_n^{ij}e^{\lambda_n t} \tag{29}$$

式中 $\boldsymbol{\phi}_{i,j}$ 为 $n\times n$ 距阵 $e^{\mathbf{A}(t)}$ 的第 i 行第 j 列元素。$b_k^{i,j}$ 为 $\boldsymbol{\phi}_{i,j}$ 对应于 $e^{\lambda_k t}$ 的系数 $\begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ 3\cdots n \\ j=1,\ 2,\ 3\cdots n \end{pmatrix}$

若

$$R_e\{\lambda_k\}<0 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots n)$$

则

$$\lim_{t\to\infty}\phi_{ij}=0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2\cdots n \\ j=1,\ 2\cdots n \end{pmatrix} \tag{31}$$

若

$$R_e\{\lambda_k\}>0 \qquad (k=1,\ 2\cdots n)$$

则网络是不稳定的，不存在稳态响应，这种情况不是本文所要讨论的问题。

若

$$R_e\{\lambda_k\}=0 \qquad (k=1,\ 2\cdots n) \tag{32}$$

则 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi_{ij}$ 趋于一有界值，而网络为非衰减的。

若此时

$$\vartheta_m\{\lambda_k\}=0 \qquad (k=1,\ 2\cdots n) \tag{33}$$

则 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi_{i,j}$ 趋于一常数。

若

$$\vartheta_m(\lambda_k)\neq 0$$

则 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi_{i,j}$ 趋于一恒定振幅的正弦量。

当 **A** 存在多重特征根时，则在 $\phi_{i,j}$ 中将出现 $te^{\lambda t}$ 形式的项。在这种情况下，$\lim\limits_{t\to\infty}\phi_{i,j}$ 是否趋于 0，仍然决定于 $R_e\{\lambda\}$ 是否小于零。当 $R_e(\lambda)<0$ 时，$\lim\limits_{t\to\infty}\phi_{i,j}\to 0$。当 $R_e(\lambda)=0$ 时，网络或为不稳定的，（有虚重根情况），或者 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi_{i,j}$ 趋于一有界值。

定义一：（衰减与非衰减网络）

若 $\phi_{i,j}$ $(i=1,2\cdots n;\quad j=1,2\cdots n)$ 为 n 阶线性网络状态转移矩阵 $e^{\mathbf{A}t}=\boldsymbol{\phi}(t)$ 的任一元素，则当

$$\lim_{t\to\infty}\phi_{i,j}=0\quad(i=1,2\cdots n;\quad j=1,2\cdots n)$$

时该线性网络称为指数衰减网络（简称衰减网络）否则称为非衰减网络。

2. 衰减网络稳态响应的线性关系

对于衰减网络：$\mathbf{Y}_{稳}\in\mathbf{Y}_{os}$ 是输入的线性函数，可以对输入运用迭加原理而不必考虑初始状态 $\mathbf{X}(t_0)$。但对于非衰减网络，则 $\mathbf{Y}_{稳}\overline{\in}\mathbf{Y}_{os}$。$\mathbf{Y}_{稳}$ 不是输入的线性函数，不能简单地对输入运用迭加原理。

定理一：若网络的系数矩阵 **A** 为奇异的，则此网络或者是不稳定的，或者是非衰减的。（系数矩阵 **A** 与网络的衰减和非衰减特性的关系。）

证明：

网络的特征方程为

$$det[\mathbf{A}-\lambda\cdot 1]=\lambda^{n}+h_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+h_1\lambda+h_0=0 \tag{34}$$

式中 $h_i\geqslant 0$，$(\forall i=0,1,2,\cdots n-1)$（当系数 h_i 中有一个小于零时，特征方程就至少有一个实部大于零的根，而网络是不稳定的）。令（34）中 λ 的值为零可以求出 h_0，即

$$h_0=det(\mathbf{A}) \tag{35}$$

故若 **A** 为奇异的，则 $h_0=0$，于是由（34）有

$$\lambda(\lambda^{n-1}+h_{n-1}\lambda^{n-2}+\cdots+h_1)=0 \tag{36}$$

方程有一个零值特征根，网络是非衰减的。

定义二：（纯电容割集）

若一割集由电容元件以及可能的电流源元件所构成，则此割集称为纯电容割集。

定理二：含有纯电容割集的网络为非衰减网络。（判定非衰减网络的准则一）

证明：

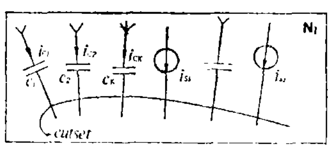

图 1

若一网络N含有纯电容割集N_1，如图1所示。建立N_1的割集电流方程，有

$$i_{c1}+i_{c2}+\cdots+i_{ck}+i_{s1}+i_{s2}+\cdots+i_{sj}=0 \tag{37}$$

$$c_1\dot{V}_{c1}+c_2\dot{V}_{c2}+\cdots+c_k\dot{V}_{ck}+i_{s1}+i_{s2}+\cdots+i_{sj}=0 \tag{38}$$

又，列出网络N的状态方程，这方程必定如下

$$(\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{AX}+\mathbf{BU})$$

$$\begin{pmatrix}\dot{V}_{c1}\\ \dot{V}_{c2}\\ \vdots\\ \dot{V}_{ck}\\ \cdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1k}\cdots\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2k}\cdots\\ \vdots & \vdots \quad \vdots\\ a_{k1} & a_{k2}\cdots a_{kk}\cdots\\ \vdots & \vdots \quad \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{c1}\\ V_{c2}\\ \vdots\\ V_{ck}\\ \vdots\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}\cdots b_{1j}\cdots\\ \vdots\\ \\ b_{k1}\cdots b_{kj}\cdots\\ \vdots \quad \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{s1}\\ \vdots\\ \\ I_{si}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{39}$$

由（39）写出关于$\dot{V}_{c1}$至$\dot{V}$的各关系式

$$\dot{V}_{c1}=(a_{11}V_{c1}+a_{12}V_{c2}+\cdots+a_{1k}V_{ck}+\cdots)+(b_{11}i_{s1}+\cdots+b_{1j}i_{sj}+\cdots) \tag{40-1}$$

$$\dot{V}_{c2}=(a_{21}V_{c1}+a_{22}V_{c2}+\cdots+a_{2k}V_{ck}+\cdots)+(b_{21}i_{s1}+\cdots+b_{2j}i_{sj}+\cdots) \tag{40-2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\dot{V}_{ck}=(a_{k1}V_{c1}+a_{k2}V_{c2}+\cdots+a_{kk}V_{ck}+\cdots)+(b_{k1}i_{s1}+\cdots+b_{kj}i_{sj}+\cdots) \tag{40-k}$$

将（40－1），（40－2）…，（40－k）各式分别乘以c_1，c_2，…c_k再相加，可得

$$\begin{aligned}&c_1\dot{V}_{c1}+c_2\dot{V}_{c2}+\cdots+c_k\dot{V}_{ck}\\&=[c_1(a_{11}V_{c1}+a_{12}V_{c2}+\cdots+a_{1k}V_{ck}+\cdots)+c_2(a_{21}V_{c1}+a_{22}V_{c2}+\\&\quad\cdots+a_{2k}V_{ck}+\cdots)+\cdots c_k(a_{k1}V_{c1}+a_{k2}V_{c2}+\cdots+a_{kk}V_{ck})+\cdots\cdots]+\\&\quad+[c_1(b_{11}i_{s1}+\cdots+b_{1j}i_{sj}+\cdots)+\cdots c_k(b_ki_{s1}++\cdots+b_{kj}i_{sj}+\cdots)]\end{aligned} \tag{41}$$

由于图（1）所示的割集N_1是N的一个子网络，而（41）式所表示的是与N的子网络N_1相关联的几个变量之间的关系，即(41)与(38)表示的是同一个关系，因此由(41)与(38)可知

$$\begin{aligned}i_{s1}+i_{s2}+\cdots+i_{sj}=-[&c_1(b_{11}i_{s1}+\cdots+b_ji_{sj}+\cdots)+\cdots+c_k(b_{k1}i_{s1}+\cdots+\\&b_{kj}i_{sj}+\cdots)]\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}&c_1(a_{11}V_{c1}+\cdots+a_{1k}V_{ck}+\cdots)+c_2(a_{21}V_{c1}+\cdots+a_{2k}V_{ck}+\cdots)+\cdots+\\&+c_k(a_{k1}V_{c1}+\cdots+a_{kk}V_{ck})=0\end{aligned} \tag{43}$$

（43）说明（39）中系数矩阵$\mathbf{A}$的1到k行是线性相关的，即$\mathbf{A}$是奇异的。由定理一可知，N是非衰减的。

定义三：（纯电感回路）

若一个回路由电感元件以及可能的电压源元件所构成，则此回路称为纯电感回路。

定理三：

含有纯电感回路的网络为非衰减网络。（判定非衰减网络的准则二）

证明：

定理三为定理二的对偶，其证明过程完全相似，这里不再重复。

其实，从能量的角度看，若一个网络含有耗能元件（电阻），则此网络要消耗一定的能

量，经过一定时间，其所储有的初始能量将耗尽。但若网络中含有纯电容割集(与/或）纯电感回路，则在纯电容割集（与/或）纯电感回路中会产生能量的“自持”现象，使初始能量不会耗尽(可能在初始能量向几个元件的分配过程中会消耗掉一部分)，但总有一部分永远储存在纯电容割集（与/或）纯电感回路中。

定理四：

若一网络由电容元件、电感元件及电源元件所构成，则此网络为非衰减网络。（判定非衰减网络准则三）

证明：

当网络中不存在耗能元件时，其状态方程为（见参考文献[5]）

$$(\mathbf{C}_c+\mathbf{F}_{cs}\mathbf{C}_s\mathbf{F}_{cs}^T)\dot{\mathbf{V}}_c=-\mathbf{F}_{cl}\mathbf{i}_l-\mathbf{F}_{ci}\mathbf{i}_i-\mathbf{F}_{cs}\mathbf{C}_s\mathbf{F}_{vs}^T\dot{V}_v \tag{44-1}$$

$$(\mathbf{L}_L+\mathbf{F}_{\gamma L}^T\mathbf{L}_\gamma\mathbf{F}_{\gamma L})\dot{\mathbf{i}}_L=\mathbf{F}_{cL}^T\mathbf{V}_c+\mathbf{F}_{\gamma L}^T\mathbf{V}_v-\mathbf{F}_{\gamma L}^T\mathbf{L}_\gamma\mathbf{F}_{\gamma i}\dot{\mathbf{i}}_i \tag{44-2}$$

式中的各下标 c, s, γ，l，v，i 一方面表示相应元件的个数,(如树支电容有 c 个，链支电容有 s 个等等），同时又表示各 F 是基本割集中属于那些元件的子块（如 $\mathbf{F}_{cs}$ 表示电容树支的基本割集关于电感链支的子块等等）。令

$$\mathbf{P}_c^{-1}\triangleq\mathbf{C}_c+\mathbf{F}_{cs}\mathbf{C}_s\mathbf{F}_{cs}^T=[1\ \mathbf{F}_{cs}]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_c & 0\\ 0 & \mathbf{C}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{F}_{cs}^T\end{bmatrix} \tag{45-1}$$

$$\mathbf{Q}_L^{-1}\triangleq\mathbf{L}_L+\mathbf{F}_{\gamma L}^T\mathbf{L}_\gamma\mathbf{F}_{\gamma L}=[1\mathbf{F}_{\gamma L}^T]\begin{bmatrix}\mathbf{L}_L & 0\\ 0 & \mathbf{L}_\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{F}_{cs}^T\end{bmatrix} \tag{45-2}$$

若所有元件为正元件，则 $\mathbf{C}_c$，$\mathbf{C}_s$，$\mathbf{L}_L$，$\mathbf{L}_\gamma$ 都为对角正定矩阵。故 $\mathbf{P}_c^{-1}$，$\mathbf{Q}_L^{-1}$ 也都为正定矩阵，其逆矩阵 $\mathbf{P}_c$，$\mathbf{Q}_L$ 存在。于是，状态方程（44）的系数矩阵 **A** 为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{P}_c\mathbf{F}_{cL}\\ \mathbf{Q}_L\mathbf{F}_{cL}^T & 0\end{bmatrix} \tag{46}$$

当网络为奇数阶，即 $n=2k+1$，（$k=0$，1，2，…）时，其特征方程为

$$det(\mathbf{A}-\lambda\cdot 1)=\lambda^{2k+1}+h_{2(k-1)+1}\lambda^{2(k-1)+1}+h_{2(k-2)+1}\lambda^{2(k-2)+1}+\cdots+h_1\lambda=0 \tag{47}$$

式中 $h_{2(k-j)+1}\geqslant 0$，（$\forall j=1,2\cdots k$）可见网络有一零值特征根而是非衰减的。

当网络为偶数阶，且 **A** 的两个($\forall j=1$，2，…，k)对角子块维数不相等时，特征方程的常数项仍为 0，网络仍有零值特征根而是非衰减的。

当网络为偶数阶，且 **A** 的两个对角子块维数相等时，其特征方程为

$$det[\mathbf{A}-\lambda\cdot 1]=\lambda^{2k}+h_{2(k-1)}\lambda^{2(k-1)}+h_{2(k-2)}\lambda^{2(k-2)}+\cdots+h_2\lambda^2+h_0=0 \tag{48}$$

式中 $h_{2(k-j)}\geqslant 0$，（$\forall j=1,2\cdots k$）网络存在实部为 0 的特征根，也是非衰减的。这就证明了由正电容、正电感及电源元件所构成的网络为非衰减的。

若网络中不存在耗能元件，则网络中所存在的初始能量尽管有可能在各元件之间发生转移或重新分配现象，但是不会消耗掉，而始终储存在网络中。

定理五： 若一网络由（正）电阻、（正）电容、（正）电感、（正）理想变压器、（正）回转器等正电路元件及电源元件所构成，当网络中：

（1）不存在纯电容割集

（2）不存在纯电感回路

则此网络为衰减网络（衰减网络的判定）

证明：

此定理是前述二、三、四等三个定理的归纳，由前述三个定理能自然导得这个结论。

定理六：衰减网络的稳态响应是输入的线性函数。（衰减网络的稳态响应）

证明：

$$\mathbf{Y}_{稳}=\lim_{t\to\infty}\mathbf{Y}=\lim_{t\to\infty}(\mathbf{Y}_{oi}+\mathbf{X}_{os})=\lim_{t\to\infty}\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0)+\lim_{t\to\infty}\mathbf{Y}_{os} \quad (49)$$

对衰减网络 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi_{i,j}\to 0(\forall i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ \forall j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

故

$$\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}())\longrightarrow 0 \quad (50)$$

（50）代入（49）有

$$\mathbf{Y}_{稳}=\lim_{t\to\infty}\mathbf{Y}_{os}\in\mathbf{Y}_{os} \quad (51)$$

由于$\mathbf{Y}_{os}$是输入的线性函数，故$\mathbf{Y}_{稳}$是输入的线性函数。

由定理六的证明过程可见，对衰减网络进行稳态分析可以不考虑初始状态，而将所有初始状态看作为零初始状态来进行分析，如图2所示。

$$\boxed{\begin{matrix}\mathrm{N}:\ \mathbf{U}(t)\\ \mathbf{X}(0)\neq 0\end{matrix}}\longrightarrow\boxed{\begin{matrix}\widehat{\mathrm{N}}:\ \mathbf{U}(t)\\ \mathbf{X}(0)=0\end{matrix}}\qquad \mathbf{Y}_{稳}=\widehat{\mathbf{Y}}_{稳}$$

图 2

对非衰减网络来说，当网络存在初始条件时，则$\mathbf{Y}_{稳}$既不是输入的线性函数，也不是初始条件的线性函数。若将所有初始电容电压用一与电容元件相串联的独立电压源元件来置换，所有初始电感电流用一与电感元件相并联的独立电流源来置换，则置换以后网络的稳态响应为输入的线性函数。关于这些问题也是众所周知的，本文就不准备多作讨论了。

参 考 文 献

[1] Desoer C.A.and E.S.Kuh: Basic Circuit Theory, McGraw—Hill Book Company New York, 1969, ch4.ch5.ch6.ch12

[2] Peikari B: Fundamentals of Network Analysis and Synthesis, Prentice—Hall Inc Englewood cliffs N.J, 1974, ch2.ch3.ch5.ch6

[3] Murdoch J B: Network Theory, McGraw—Hill Book Company New York 1970, ch9

[4] 李瀚荪：《电路分析基础》，人民教育出版社，1978 ch7

[5] 陈大棓：《网络分析的状态变量法》——教育部委託重庆大学主办全国高等工科院校电工师资进修班讲义，1979，p21～25，p57～62

[6] 钟佐华，李灿宏：《网络图论和矩阵分析法》，人民邮电出版社，1983，ch2