

多变量系统连续模型 与其离散模型间的一些转换关系

徐宁寿 寿涛 (工业自动化系)

【摘要】 利用状态空间法探讨了以矩阵多项式分式形式给出的多变量线性定常系统的传递函数阵与其离散化所得脉冲传递函数阵之间的转换关系。首先,对多变量连续系统和离散系统都给出了用与传递函数阵参数有直接关系的参数阵表达的状态空间模型,并作对角化处理。然后,又导出了直接由多变量连续系统状态模型作离散化的基本公式,进而导出了由传递函数阵参数推求脉冲传递函数阵参数的基本转换关系式。

关键词: 多变量系统分析, 采样系统模型

一、引言

现考虑输入 u 为 r 维、输出 y 为 m 维的多变量线性定常系统,其连续模型的传递函数阵为

$$H(s) = [A(s)]^{-1} B(s) e^{-\tau s} \quad (1.1)$$

式中 τ 为时延,又

$$\left. \begin{aligned} A(s) &= I_m s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \cdots + A_1 s + A_0 \\ &= (sI_m - P_n)(sI_m - P_{n-1}) \cdots (sI_m - P_1) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$$B(s) = B_{n-1} s^{n-1} + \cdots + B_1 s + B_0 \quad (1.3)$$

均为 s 的矩阵多项式, I_m 为 m 维单位矩阵, $P_i \in R^{m \times m}$, $i=1, 2, \dots, n$; $A_i \in R^{m \times m}$ 及 $B_i \in R^{m \times r}$, $i=0, 1, \dots, n-1$ 。

在数字计算机控制情况下,当按周期 h 进行采样并作零阶保持时,从理论上可按以下离散化方法由 $H(s)$ 得出脉冲传递函数阵

$$H^*(z) = Z \left\{ L^{-1} \left[\frac{1 - e^{-hs}}{s} H(s) \right] \right\} \quad (1.4)$$

它也可以化为矩阵多项式的分式形式,即

$$H^*(z) = [A^*(z)]^{-1} B^*(z) z^{-d} \quad (1.5)$$

本文于1987年6月16日收到。

* 本项研究由国家电子工业部(85)电科字0312号基金资助。

设式中离散时延 $d = \tau/h$ 为整数

$$A^*(z) = I_m z^n + A_1^* z^{n-1} + \cdots + A_{n-1}^* z + A_n^* \quad (1.6a)$$

$$= (zI_m - P_n^*)(zI_m - P_{n-1}^*) \cdots (zI_m - P_1^*) \quad (1.6b)$$

$$B^*(z) = B_1^* z^{n-1} + \cdots + B_{n-1}^* z + B_n^* \quad (1.7)$$

均为 $z = e^{hs}$ 的矩阵多项式, $P_i^* \in R^{m \times m}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $A_i^* \in R^{m \times m}$, $B_i^* \in R^{m \times r}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ 。

但是, 关于(1.1)与(1.5)这两种模型间的具体关系, 在多变量系统情况下是相当繁杂的, 要给出显式表达十分困难。对此, 一般有关多变量系统的专著^[1~3]也很少提及。文献^[4]中采用差分代替微分的方法进行离散化, 导出了一些形式不太复杂的关系式。但由于这种方法是近似的, 故所得结果只在小采样周期条件下才有一定意义。

一般来说, 客观存在的受控对象本质上是连续的, 只是在数字控制情况下才表现出离散化性质。因此, 实际存在 (而不是人为臆造) 的 $H^*(z)$ 的结构应有与 $H(s)$ 的结构密切关联的固有规律。深入探讨 $H^*(z)$ 与 $H(s)$ 之间关系的具体形式, 无疑对改进采样系统的辨识或控制是有益的。本文主要利用状态空间法对这一问题进行研究。

二、连续系统状态空间模型的选择及其对角化

由(1.2)式易知 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 所应满足的 n 个矩阵方程为

$$A_{n-i} = (-1)^i \sum_{n \geq j_1 > \cdots > j_i \geq 1} P_{j_1} P_{j_2} \cdots P_{j_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1a)$$

特别, 对 $i=1$ 和 n 有

$$A_{n-1} = - \sum_{i=1}^n P_i \quad \text{及} \quad A_0 = (-1)^n P_n P_{n-1} \cdots P_1 \quad (2.1b)$$

在已知 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 之后, 可按以下引理找出相应的状态模型。

引理 2.1 在 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 均为非奇异阵的情况下, 与连续系统的传递函数阵(1.1)式等效的一种可控、可观状态模型为

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_{n-1}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & I_m & O_m & \cdots & O_m \\ O_m & P_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & P_{n-1} & I_m \\ O_m & \cdots & \cdots & O_m & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1}(t) \\ \mathbf{x}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{B}_{n-1} \\ \widetilde{B}_n \end{pmatrix} u(t-\tau) \quad (2.2)$$

$$\text{或} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t-\tau) \quad (2.2)$$

$$\text{及} \quad \mathbf{y}(t) = [\mathbf{I}_m \mathbf{O}_m \cdots \mathbf{O}_m] \mathbf{x}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \quad (2.3)$$

式中 O_m 为 $m \times m$ 零矩阵; $A \in R^{l \times l}$, $B \in R^{l \times r}$, $C \in R^{m \times l}$, $l = m, n$; $\tilde{B}_i \in R^{m \times r}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 满足:

$$B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \\ \tilde{B}_4 \\ \vdots \\ \tilde{B}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O_m & \cdots & \cdots & O_m \\ \tilde{P}_{2,1} & I_m & O_m & & \\ \tilde{P}_{3,2} & \tilde{P}_{3,1} & I_m & O_m & \\ \tilde{P}_{4,3} & \tilde{P}_{4,2} & \tilde{P}_{4,1} & I_m & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \tilde{P}_{n,n-1} & \tilde{P}_{n,n-2} & \tilde{P}_{n,n-3} & \cdots & \tilde{P}_{n,1} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{n-1} \\ B_{n-2} \\ \vdots \\ B_1 \\ B_0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\tilde{P}_{i,\beta} = \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq \dots j \beta \leq n} P_{j1} P_{j2} \cdots P_{j\beta}, \quad i=2, 3, \dots, n; \beta=1, 2, \dots, n-1 \quad (2.5a)$$

特别, 对 $\beta=1$ 及 $i=n$ 有

$$\tilde{P}_{i,1} = \sum_{j=i}^n P_j \quad \text{及} \quad \tilde{P}_{n,\beta} = P_n^\beta \quad (2.5b)$$

证明: 由(2.2)及(2.3)式有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}_1(t) = P_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) + \tilde{B}_1 \mathbf{u}(t-\tau) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= P_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_3(t) + \tilde{B}_2 \mathbf{u}(t-\tau) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\mathbf{x}}_{n-1}(t) &= P_{n-1} \mathbf{x}_{n-1}(t) + \mathbf{x}_n(t) + \tilde{B}_{n-1} \mathbf{u}(t-\tau) \\ \dot{\mathbf{x}}_n(t) &= P_n \mathbf{x}_n(t) + \tilde{B}_n \mathbf{u}(t-\tau) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

不失一般性, 令 $\tau=0$ 并记 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ 及 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$, 则依次利用(2.6)式中各子式, 可通过逐步迭代推出 (对 $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}_i$ 及 $\mathbf{y}$ 均设初值为 0):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_2 &= \dot{\mathbf{y}} - P_1 \mathbf{y} - \tilde{B}_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{x}_3 &= \ddot{\mathbf{y}} - (P_2 + P_1) \dot{\mathbf{y}} + P_2 P_1 \mathbf{y} - \tilde{B}_1 \dot{\mathbf{u}} + (P_2 \tilde{B}_1 - \tilde{B}_2) \mathbf{u} \\ \mathbf{x}_4 &= \dddot{\mathbf{y}} - (P_3 + P_2 + P_1) \ddot{\mathbf{y}} + (P_3 P_2 + P_3 P_1 + P_2 P_1) \dot{\mathbf{y}} - P_3 P_2 P_1 \mathbf{y} \\ &\quad - \tilde{B}_1 \ddot{\mathbf{u}} + [(P_3 + P_2) \tilde{B}_1 - \tilde{B}_2] \dot{\mathbf{u}} - [P_3 P_2 \tilde{B}_1 - P_3 \tilde{B}_2 + \tilde{B}_3] \mathbf{u} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{y}^{(n-1)} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} P_i \right) \mathbf{y}^{(n-2)} + \left(\sum_{n-1 \geq i_1 \geq i_2 \geq 1} P_{i_1} P_{i_2} \right) \mathbf{y}^{(n-3)} - \left(\sum_{n-1 \geq i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq 1} \right. \\ &\quad \left. \cdot P_{i_1} P_{i_2} P_{i_3} \right) \mathbf{y}^{(n-4)} + \cdots + (-1)^{n-1} P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_1 \mathbf{y} - \tilde{B}_1 \mathbf{u}^{(n-2)} + \left[\left(\sum_{i=2}^{n-1} P_i \right) \tilde{B}_1 - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{B}_2 \right] \mathbf{u}^{(n-3)} - \left[\left(\sum_{n-1 \geq i_1 \geq i_2 \geq 2} P_{i_1} P_{i_2} \right) \tilde{B}_1 - \left(\sum_{i=3}^n P_i \right) \tilde{B}_2 + \tilde{B}_3 \right] \mathbf{u}^{(n-4)} + \cdots \end{aligned}$$

$+(-1)^{n-1}[(P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_2)\tilde{B}_1 - (P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_3)\tilde{B}_2 + \cdots + P_{n-1}\tilde{B}_{n-2} - \tilde{B}_{n-1}]\mathbf{u}$
 将上式代入 (2.6) 式中最后一个式子 $\mathbf{x}_n = P_n \mathbf{x}_n + \tilde{B}_n \mathbf{u}$, 并作整理后得

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(n)} &= \left(\sum_{i=1}^n P_i \right)^{(n-1)} \mathbf{y} + \left(\sum_{n \geq i_1 > i_2 \geq 1} P_{i_1} P_{i_2} \right)^{(n-2)} \mathbf{y} \\ &\quad - \left(\sum_{n \geq i_1 > i_2 > i_3 \geq 1} P_{i_1} P_{i_2} P_{i_3} \right)^{(n-3)} \mathbf{y} + \cdots + (-1)^n P_n P_{n-1} \cdots P_1 \mathbf{y} \\ &= \tilde{B}_1^{(n-1)} \mathbf{u} - \left[\left(\sum_{i=2}^n P_i \right) \tilde{B}_1 - \tilde{B}_2 \right]^{(n-2)} \mathbf{u} + \left[\left(\sum_{n \geq i_1 > i_2 \geq 2} P_{i_1} P_{i_2} \right) \tilde{B}_1 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{i=3}^n P_i \right) \tilde{B}_2 + \tilde{B}_3 \right]^{(n-3)} \mathbf{u} - \left[\left(\sum_{n \geq i_1 > i_2 > i_3 \geq 2} P_{i_1} P_{i_2} P_{i_3} \right) \tilde{B}_1 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{n \geq i_1 > i_2 \geq 3} P_{i_1} P_{i_2} \right) \tilde{B}_2 + \left(\sum_{i=4}^n P_i \right) \tilde{B}_3 - \tilde{B}_4 \right]^{(n-4)} \mathbf{u} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} [(P_n P_{n-1} \cdots P_2) \tilde{B}_1 - (P_n P_{n-1} \cdots P_3) \tilde{B}_2 + \cdots \\ &\quad + P_n P_{n-1} \tilde{B}_{n-2} - P_n \tilde{B}_{n-1} + \tilde{B}_n] \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.7)$$

另一方面, 由 (1.1)~(1.3) 式知

$$A(s)Y(s) = B(s)e^{-\tau s}U(s)$$

$$\text{或} \quad \mathbf{y}^{(n)}(t) + A_{n-1} \mathbf{y}^{(n-1)}(t) + \cdots + A_1 \mathbf{y}'(t) + A_0 \mathbf{y}(t)$$

$$= B_{n-1} \mathbf{u}^{(n-1)}(t-\tau) + \cdots + B_1 \mathbf{u}'(t-\tau) + B_0 \mathbf{u}(t-\tau) \quad (2.8)$$

令上式中 $\tau=0$, 再与 (2.7) 式比较对应项系数阵可知, 等号左边各项比较结果正好符合 (2.1a) 式, 而等号右边各项比较结果为

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= B_{n-1} \\ - \left(\sum_{i=2}^n P_i \right) \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 &= B_{n-2} \\ \left(\sum_{n \geq i_1 > i_2 \geq 2} P_{i_1} P_{i_2} \right) \tilde{B}_1 - \left(\sum_{i=3}^n P_i \right) \tilde{B}_2 + \tilde{B}_3 &= B_{n-3} \\ - \left(\sum_{n \geq i_1 > i_2 > i_3 \geq 2} P_{i_1} P_{i_2} P_{i_3} \right) \tilde{B}_1 + \left(\sum_{n \geq i_1 > i_2 \geq 3} P_{i_1} P_{i_2} \right) \tilde{B}_2 - \left(\sum_{i=4}^n P_i \right) \tilde{B}_3 \\ + \tilde{B}_4 &= B_{n-4} \cdots \cdots \cdots \\ (-1)^{n-1} [(P_n P_{n-1} \cdots P_2) \tilde{B}_1 - (P_n P_{n-1} \cdots P_3) \tilde{B}_2 + \cdots + P_n P_{n-1} \tilde{B}_{n-2} - P_n \tilde{B}_{n-1} \\ + \tilde{B}_n] &= B_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

以上各式可通过依次迭代求解出:

$$\begin{cases} \widetilde{B}_1 = B_{n-1} \\ \widetilde{B}_2 = \widetilde{P}_{2,1} B_{n-1} + B_{n-2} \\ \widetilde{B}_3 = \widetilde{P}_{3,2} B_{n-1} + \widetilde{P}_{3,1} B_{n-2} + B_{n-3} \\ \widetilde{B}_4 = \widetilde{P}_{4,3} B_{n-1} + \widetilde{P}_{4,2} B_{n-2} + \widetilde{P}_{4,1} B_{n-3} + B_{n-4} \\ \dots\dots\dots \\ \widetilde{B}_n = \widetilde{P}_{n,n-1} B_{n-1} + \widetilde{P}_{n,n-2} B_{n-2} + \dots + P_{n,1} B_1 + B_0 \end{cases}$$

这正好符合(2.4)式。其中 $\widetilde{P}_{i,\beta}, i=2, 3, \dots, n; \beta=1, 2, \dots, n-1$ 的定义符合(2.5)式。因此, 状态模型(2.2)、(2.3)式与传递函数阵模型(1.1)式所引出的系统输入—输出关系(2.8)式完全等价。■

由(2.2)和(2.3)两式还可得出传递函数阵的另一种表达式

$$H(s) = C(sI_l - A)^{-1} B e^{-\tau s} \quad (2.10)$$

为便于进一步分析, 下面再研究 A 阵的对角化问题。由于

$$\det A(s) = \prod_{i=1}^n \det(sI_m - P_i) = \det(sI_l - A)$$

所以系统的极点, 即 $\det A(s)=0$ 的 l 个根 $p_{ij}, i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$ 是 n 个 P_i 阵的特征值, 又是 A 阵的特征值。利用矩阵的特征值不受相似变换影响的性质, 容易导出以下引理。

引理2.2 连续系统状态模型(2.2)和(2.3)式在 A 阵的 l 个特征值互不重合的情况下, 可化为如下对角型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}'(t) = \hat{A} \mathbf{x}'(t) + B' \mathbf{u}(t-\tau) \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t) = C' \mathbf{x}'(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= T \mathbf{x}(t) \\ \hat{A} &= \text{block diag}[\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_n] \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\hat{P}_i = \text{diag}[p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im}], i=1, 2, \dots, n$$

$$B' = T B = [Q_1^{R\tau} : Q_2^{R\tau} : \dots : Q_n^{R\tau}]^T \quad (2.14)$$

$$C' = C T^{-1} = [Q_1^L : Q_2^L : \dots : Q_n^L] \quad (2.15)$$

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ O_m & T_2 & R_{23} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_{n-1,n} \\ O_m & \dots & O_m & T_n \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} L_{12} & \dots & L_{1n} \\ O_m & T_2^{-1} & L_{23} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & L_{n-1,1} \\ O_m & \dots & O_m & T_n^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

T_i 满足

$$P_i = T_i^{-1} \hat{P}_i T_i, i=1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

而 R_{ij} 和 L_{ij} 满足

$$\left. \begin{aligned} T_i^{-1} R_{ij} + L_{i, i+1} R_{i+1, j} + \cdots + L_{i, j-1} R_{j-1, j} + L_{ij} T_j = O_m \end{aligned} \right\} \quad (2.18a)$$

$$i=1, 2, \dots, n-1; j=i+1, \dots, n$$

$$\text{及 } T_i^{-1} \tilde{P}_i R_{ij} + L_{i, i+1} \tilde{P}_{i+1} R_{i+1, j} + \cdots + L_{i, j-1} \tilde{P}_{j-1, j} + L_{ij} \tilde{P}_j T_j = \begin{cases} I_m, & j=i+1, \\ O_m, & j=i+2, \dots, n \end{cases}$$

$$i=1, 2, \dots, n-1 \quad (2.18b)$$

注：以上二式分别由

$$T^{-1}T = I_l \quad (2.19)$$

和

$$T^{-1}AT = A$$

的展开式导出。

由(2.11)和(2.12)两式引出的传递函数阵表达式为

$$H(s) = C'(sI_l - \tilde{A})^{-1} B' e^{-\tau s} \quad (2.20)$$

再利用(2.13)、(2.14)和(2.15)三式得

$$H(s) = \left[\sum_{i=1}^n Q_i^L (sI_m - \tilde{P}_i)^{-1} Q_i^R \right] e^{-\tau s} \quad (2.21)$$

由(2.14)~(2.16)三式可知

$$Q_i^L = [\mathbf{q}_{i1}^L : \mathbf{q}_{i2}^L : \cdots : \mathbf{q}_{im}^L]_{m \times m} \quad (2.22a)$$

$$= \begin{cases} T_i^{-1}, & i=1 \\ L_{1i}, & i=2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (2.22b)$$

$$\text{及 } Q_i^R = [\mathbf{q}_{i1}^R : \mathbf{q}_{i2}^R : \cdots : \mathbf{q}_{im}^R]^T \quad (2.23a)$$

$$= \begin{cases} T_i \tilde{B}_i + \sum_{j=i+1}^n R_{ij} \tilde{B}_j, & i=1, 2, \dots, n-1 \\ T_n \tilde{B}_n, & i=n \end{cases} \quad (2.23b)$$

于是, (2.21)式可进一步展开为如下部分分式形式

$$H(s) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Q_{ij} \frac{1}{s - p_{ij}} \right) e^{-\tau s} \quad (2.24)$$

式中 $Q_{ij} = \mathbf{q}_{ij}^L \mathbf{q}_{ij}^R$

对比(2.24)和(1.1)两式, 容易证明

$$Q_{ij} = (s - p_{ij}) H(s) \Big|_{s=p_{ij}} = \frac{\tilde{A}(s) B(s)}{\prod_{\substack{i'=1 \\ (i'=i, j'=j)}}^n \prod_{\substack{j'=1 \\ (j'=j)}}^m (s - p_{i'j'})}$$

式中 $\tilde{A}(s)$ 为 $A(s)$ 的伴随矩阵。

三、离散系统状态空间模型的选择及其对角化

由(1.6)式易知 P_1^* , P_2^* , P_3^* 所应满足的 n 个矩阵方程为

$$A_i^* = (-1)^i \sum_{n \geq j_1 > \dots > j_i \geq 1} P_{j_1}^* P_{j_2}^* \dots P_{j_i}^*, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.1a)$$

特别, 对 $i=1$ 和 n 有

$$A_1^* = - \sum_{i=1}^n P_i^* \quad \text{及} \quad A_n^* = (-1)^n P_n^* P_{n-1}^* \dots P_1^* \quad (3.1b)$$

在已知 $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$ 之后, 对离散系统也有与连续系统的引理 2.1 和 2.2 相当的二个引理。

引理 3.1 在 $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$ 均为非奇异阵情况下, 与离散系统的传递函数阵 (1.5) 式等效的一种可控可观状态模型为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1}(k+1) \\ \mathbf{x}_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^* & I_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & P_2^* & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & P_{n-1}^* & I_m \\ O_m & \dots & \dots & O_m & P_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1}(k) \\ \mathbf{x}_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1^* \\ \widetilde{B}_2^* \\ \vdots \\ \widetilde{B}_{n-1}^* \\ \widetilde{B}_n^* \end{pmatrix} \mathbf{u}(k-d) \quad (3.2)$$

或 $\mathbf{x}(k+1) = A^* \mathbf{x}(k) + B^* \mathbf{u}(k-d)$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= [I_m O_m \dots O_m] \mathbf{x}(k) \\ &= C \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

式中 $A^* \in R^{l \times l}$, $B^* \in R^{l \times r}$, $\widetilde{B}_i^* \in R^{m \times r}$, $i=1, 2, \dots, n$ 满足:

$$B^* = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1^* \\ \widetilde{B}_2^* \\ \widetilde{B}_3^* \\ \widetilde{B}_4^* \\ \vdots \\ \widetilde{B}_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O_m & \dots & \dots & O_m \\ \widetilde{P}_{2,1}^* & I_m & O_m & & \\ \widetilde{P}_{3,2}^* & \widetilde{P}_{3,1}^* & I_m & O_m & \\ \widetilde{P}_{4,3}^* & \widetilde{P}_{4,2}^* & \widetilde{P}_{4,1}^* & I_m & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \widetilde{P}_{n,n-1}^* & \widetilde{P}_{n,n-2}^* & \widetilde{P}_{n,n-3}^* & \dots & \widetilde{P}_{n,1}^* I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^* \\ B_2^* \\ \vdots \\ B_{n-1}^* \\ B_n^* \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\widetilde{P}_{i,\beta}^* = \sum_{i \leq j_1 \leq \dots \leq j_\beta \leq n} P_{j_1}^* P_{j_2}^* \dots P_{j_\beta}^*, \quad i=2, 3, \dots, n; \quad \beta=1, 2, \dots, n-1 \quad (3.5a)$$

特别, 对 $\beta=1$ 及 $i=n$ 有

$$\widetilde{P}_{i,1}^* = \sum_{j=i}^n P_j^* \quad \text{及} \quad \widetilde{P}_{n,\beta}^* = P_n^{*\beta} \quad (3.5b)$$

于是, 由 (3.2) 和 (3.3) 两式得出的另一种传递函数阵表达式为

$$H^*(z) = C(zI_l - A^*)^{-1} B^* z^{-d}$$

由于

$$\det A^*(z) = \prod_{i=1}^n \det(zI_m - P_i^*) = \det(zI_l - A^*)$$

所以系统的极点, 即 $\det A^*(z) = 0$ 的 l 个根 p_{ij}^* , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$ 既是 n 个 P_i^* 阵的特征值, 又是 A^* 阵的特征值。于是, 又有以下引理。

引理3.2 离散系统状态模型 (3.2) 和 (3.3) 式在 A^* 阵的 l 个特征值互不重合的情况下可化为如下对角型

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_{(k+1)} = \tilde{A}^* \mathbf{x}'_{(k)} + B^{*'} \mathbf{u}_{(k-d)} \\ \mathbf{y}_{(k)} = C^{*'} \mathbf{x}'_{(k)} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{x}'_{(k)} = T^* \mathbf{x}_{(k)} \quad (3.7)$$

式中

$$\tilde{A}^* = \text{block diag}[\tilde{P}_1^*, \tilde{P}_2^*, \dots, \tilde{P}_n^*] \quad (3.8)$$

$$\tilde{P}_i^* = \text{diag}[p_{i1}^*, p_{i2}^*, \dots, p_{im}^*], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$B^{*'} = T^* B^* = [Q_1^{R*'} : Q_2^{R*'} : \dots : Q_n^{R*'}]^\tau \quad (3.9)$$

$$C^{*'} = C T^{*-1} = [Q_1^{L*'} : Q_2^{L*'} : \dots : Q_n^{L*'}] \quad (3.10)$$

$$T^* = \begin{pmatrix} T_1^* & R_{12}^* & \dots & R_{1n}^* \\ O_m & T_2^* & R_{23}^* & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_{n-1,n}^* \\ O_m & \dots & O_m & T_n^* \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad T^{*-1} = \begin{pmatrix} T_1^{*-1} & L_{12}^* & \dots & L_{1n}^* \\ O_m & T_2^{*-1} & L_{23}^* & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & L_{n-1,n}^* \\ O_m & \dots & O_m & T_n^{*-1} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

T_i^* 满足

$$P_i^* = T_i^{*-1} \tilde{P}_i^* T_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

而 R_{ij}^* 和 L_{ij}^* 满足

$$\left. \begin{aligned} T_i^{*-1} R_{ij}^* + L_{i,i+1}^* R_{i+1,j}^* + \dots + L_{i,j-1}^* R_{j-1,j}^* + L_{ij}^* T_j^* &= O_m \\ i &= 1, 2, \dots, n-1; \quad j = i+1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (3.13a)$$

$$\begin{aligned} \text{及} \quad T_i^{*-1} \tilde{P}_i^* R_{ij}^* + L_{i,i+1}^* \tilde{P}_{i+1}^* R_{i+1,j}^* + \dots + L_{i,j-1}^* \tilde{P}_{j-1}^* R_{j-1,j}^* + L_{ij}^* \tilde{P}_j^* T_j^* & \\ + L_{ij}^* \tilde{P}_j^* T_j^* &= \begin{cases} I_m, & j = i+1 \\ O_m, & j = i+2, \dots, n \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.13b)$$

注: 以上两式分别由

$$T^{*-1} T^* = I_l \quad \text{和} \quad T^{*-1} \tilde{A}^* T^* = A^* \quad (3.14)$$

的展开式导出。

由 (3.6) 和 (3.7) 二式引出的脉冲传递函数阵表达式为

$$H^*(z) = C^{*'} (zI_l - \tilde{A}^*)^{-1} B^{*'} z^{-d} \quad (3.15)$$

再利用 (3.8)、(3.9) 和 (3.10) 三式得

$$H^*(z) = \sum_{i=1}^n Q_i^{L*'} (zI_m - \tilde{P}_i^*)^{-1} Q_i^{R*'} z^{-d} \quad (3.16)$$

由(3.9)~(3.11)式可知

$$Q_i^{L*} = [\mathbf{q}_{i1}^{L*} : \mathbf{q}_{i2}^{L*} : \cdots : \mathbf{q}_{im}^{L*}]_{m \times m} \quad (3.16a)$$

$$= \begin{cases} T_1^{*-1}, & i=1 \\ L_{ii}^*, & i=2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (3.16b)$$

及 $Q_i^{R*} = [\mathbf{q}_{i1}^{R*} : \mathbf{q}_{i2}^{R*} : \cdots : \mathbf{q}_{im}^{R*}]_{r \times m} \quad (3.17a)$

$$= \begin{cases} T_i^* \widetilde{B}_i^* + \sum_{j=i+1}^n R_{ij}^* \widetilde{B}_j^*, & i=1, 2, \dots, n-1 \\ T_n^* \widetilde{B}_n^*, & i=n \end{cases} \quad (3.17b)$$

于是, (3.15)式可进一步展开为如下部分分式形式

$$H^*(z) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Q_{ij}^* \frac{1}{z - p_{ij}^*} \right) z^{-d} \quad (3.18)$$

式中 $Q_{ij}^* = \mathbf{q}_{ij}^{L*} \mathbf{q}_{ij}^{R*\tau} \quad (3.19)$

且 $Q_{ij}^* = (z - p_{ij}^*) H^*(z) \Big|_{z=p_{ij}^*} = \frac{\hat{A}^*(z) B^*(z)}{\prod_{\substack{i'=1 \\ (i' \neq i)}}^n \prod_{\substack{j'=1 \\ (j' \neq j)}}^m (z - p_{i'j'}^*)} \quad (3.20)$

$\hat{A}^*(z)$ 为 $A^*(z)$ 的伴随矩阵。

四、由系统的连续模型到离散模型的转换

为便于对(2.10)或(2.20)式以时域状态模型参数矩阵表达的传递函数阵 $H(s)$ 直接进行离散化, 首先给出以下引理。

引理4.1 对于连续系统(1.1)式的状态模型参数矩阵表达式(2.10)或(2.20)采用离散化方式(1.4)所得出的脉冲传递函数阵, 当矩阵 A 为非奇异或矩阵 $\hat{A}$ 的对角元素全部非零时, 可表为

$$H^*(z) = C(zI_l - e^{A^*h})^{-1} (e^{A^*h} - I_l) A^{-1} B z^{-d} \quad (4.1)$$

或 $H^*(z) = C'(zI_l - e^{\hat{A}^*h})^{-1} (e^{\hat{A}^*h} - I_l) \hat{A}^{-1} R' z^{-d} \quad (4.2)$

式中离散时延 $d = \tau/h$ 为整数。

证明: 将(2.10)式代入(1.4)式得

$$\begin{aligned} H^*(z) &= Z \left\{ L^{-1} \left[\frac{1 - e^{-hs}}{s} C(sI_l - A)^{-1} B e^{-\tau s} \right] \right\} \\ &= (1 - z^{-1}) CZ \left\{ L^{-1} \left[\frac{1}{s} (sI_l - A)^{-1} \right] \right\} B z^{-d} \\ &= (1 - z^{-1}) CZ \left\{ \int_0^t e^{A(t-t')} dt' \right\} B z^{-d} \\ &= (1 - z^{-1}) CZ \{ I_l - e^{At} \} (-A^{-1}) B z^{-d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-z^{-1}) C \left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} I_l - (I_l - z^{-1} e^{A^* h})^{-1} \right\} (-A^{-1}) B z^{-d} \\
 &= C (z I_l - e^{A^* h})^{-1} (e^{A^* h} - I_l) A^{-1} B z^{-d}
 \end{aligned}$$

于是 (4.1) 式得证。将 (2.20) 式代入 (1.4) 式也可证明 (4.2) 式。对比 (4.1) 和 (3.6) 两式可知 $A^* = e^{A^* h}$ 及 $B^* = e^{A^* h} - I_l e A^{-1} B$ (4.3)

将 (2.13)、(2.14) 和 (2.15) 三式代入 (4.2) 式得

$$H^*(z) = \left[\sum_{i=1}^n Q_i^L (z I_l - e^{\tilde{P}_i h})^{-1} \Delta_i Q_i^R \right] z^{-d} \quad (4.4)$$

$$\Delta_i = (e^{\tilde{P}_i h} - I_m) \tilde{P}_i^{-1} = \text{diag}[\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{im}] \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{ij} &= (e^{p_{ij} h} - 1) / p_{ij} \\
 &= h \left[1 + \frac{1}{2} p_{ij} h + \frac{1}{6} (p_{ij} h)^2 + \dots + \frac{1}{g!} (p_{ij} h)^{g-1} + \dots \right] \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (z I_m - e^{\tilde{P}_i h})^{-1} &= \text{diag} \left[\frac{1}{z - e^{p_{i1} h}}, \frac{1}{z - e^{p_{i2} h}}, \dots, \frac{1}{z - e^{p_{im} h}} \right] \\
 i &= 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

利用 (2.22a) 和 (2.23a) 两式可将 (4.4) 式进一步化为

$$H^*(z) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{q}_{ij}^L \mathbf{q}_{ij}^R \frac{\delta_{ij}}{z - e^{p_{ij} h}} \right) z^{-d} \quad (4.8)$$

将上式与 (3.18) 式对比可得

$$\mathbf{q}_{ij}^{L*} = \mathbf{q}_{ij}^L, \quad \mathbf{q}_{ij}^{R*} = \delta_{ij} \mathbf{q}_{ij}^R \text{ 及 } p_{ij}^* = e^{p_{ij} h}, \quad i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

$$\text{或 } Q_i^{L*} = Q_i^L, \quad Q_i^{R*} = \Delta_i Q_i^R \text{ 及 } \tilde{P}_i^* = e^{\tilde{P}_i h} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

上式也可通过对比 (3.16) 与 (4.4) 两式直接得出。

至此, 将传递函数阵 $H(s)$ 离散化为脉冲传递函数阵 $H^*(s)$ 的步骤可归纳如下:

当 $A(s)$ 和 $B(s)$ 按 (1.6a) 和 (1.7) 的形式给出后, P_i 阵可由 A_i 阵按 (2.1) 式解出, 进而 T_i 阵可按 (2.17) 式解出, R_{ij} 和 L_{ij} 诸阵可按 (2.18) 和 (2.19) 式解出。于是, Q_i^L 阵可由 T_i 和 L_i 阵按 (2.22b) 式得出。在 $\tilde{B}_i$ 阵由 B_i 阵按 (2.4) 式求出后, Q_i^R 阵又可由 T_i 和 R_{ij} 阵按 (2.23b) 式推得。

这样, 余下的任务便是如何按 (4.10) 式得到的 Q_i^{L*} 、 Q_i^{R*} 和 $\tilde{P}_i^*$ 诸阵进一步推求 $A^*(z)$ 和 $B^*(z)$ 中的 A_i^* 和 B_i^* 阵。

由 (4.10)、(2.22b) 和 (3.16) 三式有

$$\left. \begin{aligned} T_i^{*-1} &= Q_i^{L*} = Q_i^L = T_i^{-1} \\ L_{i1}^* &= Q_i^{L*} = Q_i^L = L_{i1}, \quad i=2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

再利用 (3.13) 和 (3.14) 式作下列推算: 先令 $j=2$ 和 $i=1$, 则有

$$\left. \begin{aligned} T_1^{-1} R_{12}^* + L_{12} T_2^* &= O_m \\ T_1^{-1} \tilde{P}_1^* R_{12}^* + L_{12} \tilde{P}_2^* T_2^* &= I_m \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

由此可解出

$$\left. \begin{aligned} R_{12}^* &= T_1 [T_1^{-1} \tilde{P}_1^* T_1 - L_{12} \tilde{P}_2^* L_{12}^{-1}]^{-1} \} \\ T_2^* &= L_{12}^{-1} [\tilde{P}_1^* L_{12} - T_1^{-1} \tilde{P}_1^* T_1]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

再令 $j=3$ 及 $i=1, 2$ 有

$$\left. \begin{aligned} T_1^{-1} R_{13}^* + L_{12} R_{23}^* + L_{13} T_3^* &= O_m \\ T_1^{-1} \tilde{P}_1^* R_{13}^* + L_{12} \tilde{P}_2^* R_{23}^* + L_{13} \tilde{P}_3^* T_3^* &= I_m \\ T_2^{*-1} R_{23}^* + L_{23} T_3^* &= O_m \\ T_2^{*-1} \tilde{P}_2^* R_{23}^* + L_{23} \tilde{P}_3^* T_3^* &= I_m \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

由此又可联立解出 R_{13}^* 、 R_{23}^* 、 T_3^* 和 L_{23}^* 。

仿此类推, 继续对不同的 $j=4, 5, \dots, n$ 设 $i=1, 2, \dots, j-1$, 便可逐步求出 T^* 和 T^{*-1} 阵中的全部子块, 进而可按(3.12)式到得 $P_i^* = T_i^{*-1} \tilde{P}_i^* T_i^*$, 再由(3.1)式即可推得 $A^*(z)$ 中的诸系数阵 A_i^* 。

为了求出 $B^*(z)$ 中的系数阵 B_i^* , 可以先利用由(3.17b)和(4.10)式引出的关系式

$$\left. \begin{aligned} \tilde{B}_n^* &= T_n^{*-1} Q_n^{R*} = T_n^{*-1} \Delta_n Q_n^R \\ \tilde{B}_i^* &= T_i^{*-1} \left(\Delta_i Q_i^R - \sum_{j=i+1}^n R_{ij}^* \tilde{B}_j^* \right), \quad i=n-1, \dots, 2, 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

逐步解出 $\tilde{B}_n^*$ 、 $\tilde{B}_{n-1}^*$ 、 $\dots$ 、 $\tilde{B}_1^*$ 。再由 P_i^* 按(3.5)式求出 $\tilde{P}_{i,\beta}^*$ 后, 即可利用由(3.4)式引出的关系式

$$\left. \begin{aligned} B_1^* &= \tilde{B}_1^* \\ B_i^* &= \tilde{B}_i^* - \sum_{\beta=1}^{i-1} \tilde{P}_{i,\beta}^* B_{i-\beta}^*, \quad i=2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

逐个求出 B_1^* 、 B_2^* 、 $\dots$ 、 B_n^* 。

值得指出, 由(2.17)和(4.10)两式可引出 P_i^* 与 P_i 间的如下关系:

$$P_i^* = e^{\overline{P}_i h}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4.17)$$

式中

$$\overline{P}_i = \tilde{T}_i^{-1} P_i \tilde{T}_i \quad (4.18)$$

$$\tilde{T}_i = T_i^{-1} T_i^* \quad (4.19)$$

五、结 束 语

由以上分析可以看出, 在多变量情况下连续系统传递函数的离散化工作远比单变量情况复杂得多(特别是要求离散化前后均采用矩阵多项式分式表达时), 本文通过状态空间模型从理论上找出其中涉及的基本关系和方法。值得指出的是, 在本文所讨论的 l 个极点不相重合的情况下, 与矩阵多项式分式表达等效的部分分式表达中, 系数矩阵 $Q_{ij} = \mathbf{q}_{ij}^L \mathbf{q}_{ij}^{R*}$, 即 Q_{ij} 必为列向量 $\mathbf{q}_{ij}^L$ 与行向量 $\mathbf{q}_{ij}^{R*}$ 相乘构成的消散矩阵, 其秩仅为 1。可以证明, 在 p_{ij} 为 r 重极点情况下, Q_{ij} 的秩即为 r 。

本文结论的直接应用参见文献^[5]。

参 考 文 献

- [1] Kailath, T.: *Linear Systems*, Prentice-Hall Inc., 1980
- [2] Patel, R. V., Munro, N.: *Multivariable System Theory and Design*, Pergamon Press, 1982
- [3] Wonham, W. M.: *Linear Multivariable Control—A Geometric Approach*, Springer-Verlag, 1974
- [4] 郑卫强、吴宏鑫、萨支天: 多变量全系数之和为 1 及其参数辨识和自适应控制(一)、(二), 《航天控制》, 1985年, 第 3 期, 第 5~15 页及1986年, 第 2 期, 第22~31页
- [5] 寿涛、徐宁寿: 多变量连续动态系统的离散化模型参数总和趋 I_m 定理的严格证明, 1987年全国控制理论与应用年会论文

Some Transform Relations Between The Continuous— time Multivariable System Model and Its Sampled Version

Xu Ningshou Shou Tao

Abstract: The transform relations between the transfer function, given in the form of matrixing polynomial fraction, and its sampled version --- pulse transfer function are investigated for linear time-invariant multivariable systems via state-space approach. The paper firstly presents the state-space models, whose parameter matrices are directly related to those in the transfer function matrices, both for the continuous-time and discrete-time multivariable systems, and then makes the state equations diagonalized. Secondly, the paper develops basic formulas for the discretization of the state-space model of continuous-time multivariable system, and furthermore, some basic relations used for the transformation of transfer function matrix into its sampled version.