故障齿轮啮合刚度综合计算方法

崔玲丽，张飞斌，康晨晖，胥永刚，高立新
（北京工业大学 机械工程与应用电子技术学院 北京市先进制造技术重点实验室，北京 100124）

摘 要： 为了有效、准确地计算含故障齿轮的时变啮合刚度，提出了一种基于传统能量法的改进方法，结合改进能量法和有限元法的各自优点，即应用改进能量法快速计算故障齿轮无故障轮齿的啮合刚度，利用有限元法精确地计算故障轮齿有故障部位的啮合刚度. 仿真示例结果表明：与能量法和有限元法相比，该方法能快速、准确地仿真故障齿轮的时变啮合刚度并且适用于齿轮系统振动响应的计算.

关键词： 故障齿轮；啮合刚度；有限元法；能量法
中图分类号： TH 17 **文献标志码：** A **文章编号：** 0254－0037(2013)03－0353－06

Calculation Method of Fault Gear Meshing Stiffness

CUI Ling-li, ZHANG Fei-bin, KANG Chen-hui, XU Yong-gang, GAO Li-xin
(Beijing Key Laboratory of Advanced Manufacturing Technology, College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: To calculate the time-varying mesh-stiffness of fault gear effectively and accurately, the improved energy method based on the traditional energy method was proposed. The method combined advantages of both the improved energy method and the finite element method i. e. conducting fast calculation of meshing stiffness of normal teeth of fault gear by improved energy method while computing meshing stiffness of fault teeth by finite element method. Simulation results prove that comparing with traditional energy method and finite element method, the method can calculate the time-varying mesh-stiffness of fault gear fast and accurately.

Key words: fault gear; meshing stiffness; finite element method; energy method

啮合过程中的单双齿交替啮合及啮合点在啮合线上位置的变化导致即使是正常状态下的齿轮，其啮合刚度也是时变的，其计算比较复杂，多数情况下将其简化为规则的方波. 当齿轮出现故障时，更增加了齿轮时变啮合刚度计算的难度. 时变啮合刚度是齿轮传动系统振动响应的主要动态激励源之一，对齿轮传动的动力学性能有着显著影响[1]. 对于轮齿变形与啮合刚度随啮合位置的变化规律尤其是故障状态下啮合刚度的变化规律的研究是轮齿修形、动态特性、故障诊断以及寿命预测等研究的基础，因此，研究故障齿轮啮合刚度的变化规律性及其快速有效的计算方法有重要的意义[2].

目前，已有学者针对齿轮时变啮合刚度计算提出了各种方法：实验法[3]的求解结果较精确，但操作复杂并且对实验设备要求高，应用的普遍性不高；线性规划法[4]针对正常齿轮啮合刚度求解时结果也较精确，但应用该法计算故障齿轮啮合刚度的文献鲜有报道，还有待研究；文献[5]系统地研究了求

收稿日期： 2011-10-29.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(51175007)；北京市科技新星计划A类资助项目(20080A14)；北京市人才强教计划资助项目(PHR20110803).
作者简介： 崔玲丽(1976—)，女，副教授，主要从事设备故障诊断、现代信号处理方面的研究，E-mail: cuilingli@bjut.edu.cn.

解时变啮合刚度的能量法，计算了正常齿轮和含常见规则形状故障的齿轮啮合刚度，对计算结果做了详细的分析，但并未对所求解刚度的准确度做必要的验证；有限元法[6]能较真实地模拟计算出齿轮的实际啮合情况，但其计算量相比前述几种方法较大. 针对故障齿轮，为了高效、准确地计算其啮合刚度，本文针对无故障齿轮的啮合刚度，利用国家标准的计算公式[7]比较了有限元法和能量法的准确度与计算效率，提出了一种基于改进能量法和有限元法的计算故障齿轮啮合刚度的方法. 该方法利用修正能量法计算含故障齿轮正常部位的啮合刚度，用有限元法计算齿轮故障部位的啮合刚度，最终整合 2 个部分数据求解出故障齿轮的完整啮合刚度.

1 齿轮啮合刚度及其计算方法

1.1 齿轮啮合刚度的基本定义

齿轮啮合刚度定义为使 1 对或几对同时啮合的精确轮齿产生啮合线方向上的单位线性变形时所需的啮合力，表示为

$$k = \frac{F}{\delta} \tag{1}$$

式中：F 为作用于轮齿的啮合力；δ 为轮齿的线性变形量.

由定义知，齿轮副在运行过程中，随着啮合位置的不同，齿轮副的啮合刚度也会随着变化. 时变的啮合刚度是齿轮系统内部激励的重要组成部分.

1.2 有限元法

为了计算齿轮副时变啮合刚度，本文用 20 节点 6 面体单元建立了齿轮副的三维有限元模型. 为了减小计算量，省略了齿轮副在 1 个完整啮合周期内不参与啮合的轮齿，这种方法已在诸多文献中被采用，并且效果良好. 以齿轮副刚进入双齿啮合区时的临界位置为初始位置，将大齿轮的轮齿刚性化，给大齿轮添加约束，使其只有啮合线方向的自由度，并对其施加啮合线方向的力 F，用于模拟啮合力；约束小齿轮轴孔面上节点的所有自由度，最后在啮合轮齿间添加接触对. 完成后的有限元模型如图 1 所示，模型的单元数为 37 620 个. 求解后得到大齿轮轮齿节点的位移 u_x 和 u_y，则小齿轮在啮合方向上的线性变形量为

$$u = u_x \cos\ \alpha_0 + u_y \sin\ \alpha_0 \tag{2}$$

式中 α_0 为标准啮合角，所以对应的刚度为

$$k_{1,1} = \frac{F}{u} \tag{3}$$

同理可以求得大齿轮的单齿刚度 $k_{2,1}$，则第 1 对轮齿的啮合刚度为

$$k_1 = \frac{k_{1,1} \times k_{2,1}}{k_{1,1} + k_{2,1}} \tag{4}$$

同理可以求解出相同初始位置时第 2 对轮齿的啮合刚度 k_2，则齿轮副的总啮合刚度为

$$k = k_1 + k_2 \tag{5}$$

旋转齿轮副使其在不同的位置啮合并计算相应位置的啮合刚度，本文在 1 个啮合周期内按照一定的步长共计算了包括临界位置的 26 个啮合位置的啮合刚度，再用样条函数拟合得到齿轮副在完整啮合周期任意位置的啮合刚度.

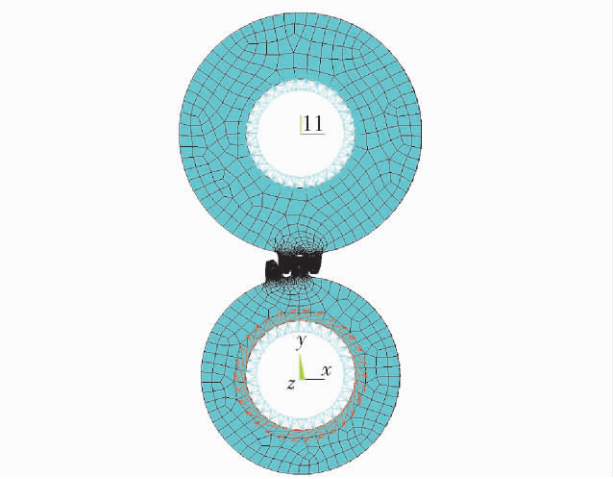

图 1 齿轮副有限元接触模型

Fig. 1 Finite element contact model of gear pair

1.3 能量法

文献[5]提出了针对故障形状为规则几何形状的能量法，以计算齿轮时变啮合刚度. 为了简化计算，只考虑轮齿的刚度；因此，可将储存在啮合齿轮中的能量分为 4 个部分：赫兹能量 U_h、弯曲能量 U_b、径向压缩能量 U_a 和剪切能量 U_s；与各能量相对应的刚度分别为赫兹刚度 k_h、弯曲刚度 k_b、径向压缩刚度 k_a 和剪切刚度 k_s. 这些刚度通过串联的方式综合后就是总的齿轮啮合刚度. 由弹性力学理论可知各能量与刚度有如下关系：

$$U_h = \frac{F^2}{2k_h}, U_b = \frac{F^2}{2k_b}, U_a = \frac{F^2}{2k_a}, U_s = \frac{F^2}{2k_s} \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 为啮合点处齿的相互作用力，方向沿啮合线方向，并且是始终与齿廓正交，可分解为 2 个正交力 $\boldsymbol{F}_a$、$\boldsymbol{F}_b$.

若假设啮合齿是等弹性体，由赫兹定理知，一对由相同材料制成的啮合齿在啮合线上的接触刚度是一个常数，而与接触位置无关. 这一常数可表示为

$$k_h = \frac{\pi EL}{4(1-\nu^2)} \tag{7}$$

式中：E 为弹性模量；L 为齿轮轴向厚度；ν 为泊松比.

假设齿轮上的齿为悬梁，而且悬梁的基是完全固定的. 由悬梁理论可知，弯曲势能为

$$U_b = \int_0^d \frac{[F_b(d-x)-M]^2}{2EI_x}\mathrm{d}x \tag{8}$$

式中：I_x 为啮合点 x 与齿根之间部分轮齿的面积惯性矩；M 为啮合分力 F_a 产生的弯矩，结合图 2 和轮齿渐开线几何特性，可以推导出

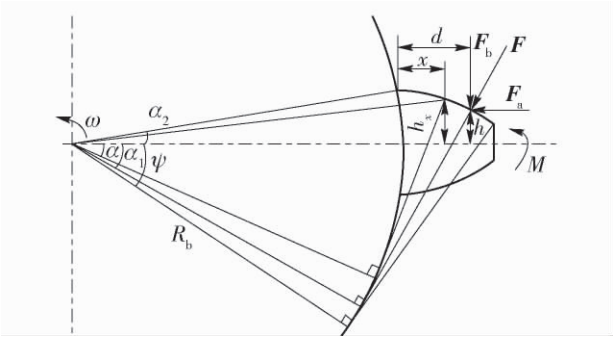

图 2　轮齿啮合受力示意图

Fig. 2　Schematic diagram of tooth contact force

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{3\{1+\cos\alpha_1[(\alpha_2-\alpha)\sin\alpha-\cos\alpha]\}^2(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha}{2EL[\sin\alpha+(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha]^3}\mathrm{d}\alpha \tag{9}$$

剪切势能可表示为

$$U_s = \int_0^d \frac{1.2F_b^2}{2GA_x}\mathrm{d}x \tag{10}$$

式中：G 为剪切模量；A_x 为横截面积.

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1.2(1+\nu)(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha\cos^2\alpha_1}{EL[\sin\alpha+(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha]}\mathrm{d}\alpha \tag{11}$$

类似地，径向压缩势能为

$$U_a = \int_0^d \frac{F_a^2}{2EA_x}\mathrm{d}x \tag{12}$$

相应的刚度表达式为

$$\frac{1}{k_a} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha\sin^2\alpha_1}{2EL[\sin\alpha+(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha]}\mathrm{d}\alpha \tag{13}$$

各刚度成分以串联的方式组合成齿轮的总体啮合刚度，$k'_{t,1}$、$k'_{t,2}$ 分别表示啮合时第 1 对轮齿和第 2 对轮齿的有效啮合刚度，则有

$$k'_t = k'_{t,1} + k'_{t,2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\frac{1}{k_{h,i}}+\frac{1}{k_{b1,i}}+\frac{1}{k_{s1,i}}+\frac{1}{k_{a1,i}}+\frac{1}{k_{b2,i}}+\frac{1}{k_{s2,i}}+\frac{1}{k_{a2,i}}} \tag{14}$$

求解式(7)、(9)、(11)、(13)、(14)即可求得 1 对齿轮的啮合刚度与主动轮转角的关系. 由于齿轮的重合度大于 1，所以齿轮副完整啮合周期包含单齿啮合区间和双齿啮合区间；因此，根据齿轮的参数，确定单齿啮合区间和双齿啮合区间，再分别求解即可得出完整啮合周期的时变啮合刚度.

1.4　正常状态下齿轮 2 种计算方法的比较

为比较 2 种方法的精确度与计算效率，以国家标准 GB—T3480[7] 给出的计算轮齿啮合平均刚度计算公式为基准，分别应用有限元法和能量法计算正常状态下齿轮的平均啮合刚度，并进行比较研究.

采用文献[5]中的齿轮参数，齿轮径节 $P=8$，齿数 $Z_1/Z_2=19/48$，齿宽 $L=16$ mm，弹性模量 $E=2.068$ GPa，泊松比 $v=0.3$，材料密度 $\rho=7\,800$ kg/m^3.

基于 GB—T3480 的计算公式求解得到上述齿轮副的平均啮合刚度 $c_y=19.53$ N/(mm·μm). 应用有限元法建立齿轮副的有限元模型，得到其时变啮合刚度曲线，计算其平均啮合刚度 $c_y=19.71$ N/(mm·μm). 应用能量法计算其时变啮合刚度曲线，对应的平均啮合刚度 $c_n=55.22$ N/(mm·μm). 图 3 为 2 种方法所计算的啮合刚度曲线图.

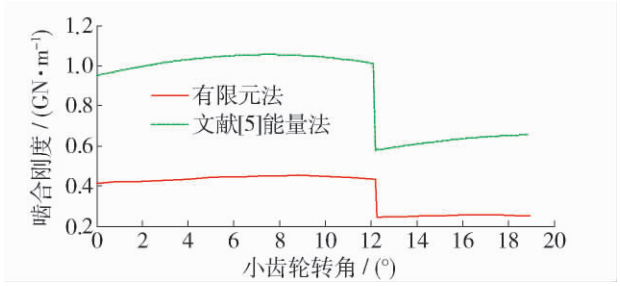

图 3　有限元法和能量法求解的正常齿轮啮合刚度

Fig. 3　Mesh stiffness of normal gear obtained by finite element method and energy method

显然，有限元法的计算结果较能量法精确，与标准值的误差为 1.5%；而文献[5]所用能量法的计算结果误差为 182%，如图 3 所示，误差很大. 分析其原因有：1) 对齿轮模型做了大量的刚性简化，忽略了轮体的弹性变形，而只考虑轮齿的刚度；2) 认为啮合刚度是由前述 4 个刚度串联组成的，而实际情况中还有无其他刚度成分或者各刚度的求解是否准

确都还有待进一步的研究，如果实际情况中还有其他刚度成分，那么也会导致总的刚度减小. 虽然如此，由图 3 可知，能量法的结果也能反映时变啮合刚度的主要特征，而且其计算量和计算所需时间较有限元法有很大的优势. 在本实例中，应用同一台计算机，计算轮齿 1 个啮合周期的啮合刚度，能量法的计算时间约为 30 min，而有限元法的计算时间约为 600 min，可见能量法的计算速度是有限元法的 20 倍左右.

2 综合计算方法

基于以上理论分析可知，能量法虽然计算效率远高于有限元法，但其局限性在于计算精度差，且只能计算故障为规则形状的齿轮啮合刚度. 有限元法计算复杂、效率低，但计算精度高，且可计算任意接触状态的齿轮啮合刚度. 因此，本文提出一种结合有限元法和改进能量法的故障齿轮啮合刚度计算方法. 该方法旨在改进现有的能量法，提高其计算精度的同时保持其计算速度的优势，并结合有限元法在精确度和齿轮故障模型建立方面的优势. 该方法的具体计算流程如图 4 所示.

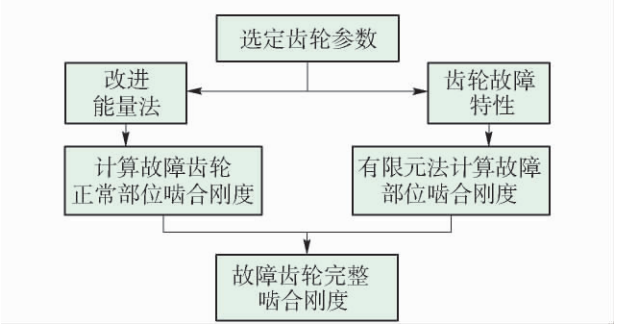

图 4 本文方法计算流程

Fig. 4 Flow diagram of this method

2.1 改进能量法

综合计算方法的关键之一是能量法的改进. 由前述可知，文献 [5] 的能量法计算结果偏大，本质原因在于其未考虑齿轮轮体的弹性变形. 文献 [8] 指出：齿轮的啮合刚度包括弯曲刚度 k_b、轮体刚度 k_f 和接触刚度 k_h. k_f 可表示为

$$\frac{1}{k_f}=\frac{\cos^2\alpha}{EL}\left\{L^*\left(\frac{u_f}{s_f}\right)^2+M^*\left(\frac{u_f}{s_f}\right)+P^*\left(1+Q^*\tan^2\alpha\right)\right\} \tag{15}$$

式中系数 L^*、M^*、P^* 和 Q^* 可由多项式函数表示为

$$X^*=\frac{A}{\theta_f^2}+Bh_f^2+\frac{Ch_f^2}{\theta_f^2}+\frac{D}{\theta_f}+Eh_f^2+F \tag{16}$$

式中：X^* 表示系数 L^*、M^*、P^* 和 Q^*；$h_f=r_f/r$，r_f 为齿根圆半径；u_f、θ_f 和 S_f 的意义如图 5 所示；A、B、C、D、E 和 F 的值见表 1.

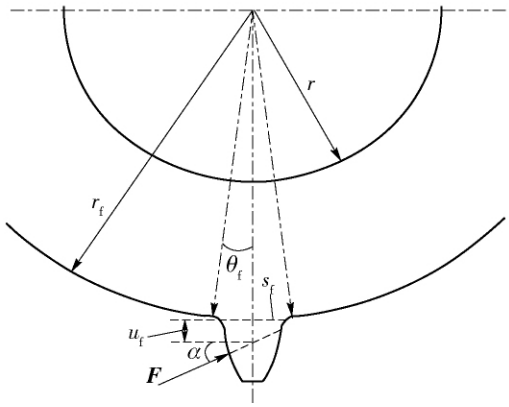

图 5 轮体形变的几何参数

Fig. 5 Geometric parameters of the base tooth deformation

然而文献 [8] 所用能量法忽略了径向压缩刚度 k_a. 鉴于此，在前有研究的基础上，本文提出一种改进能量法，该能量法将齿轮副总刚度分解为赫兹刚度 k_h、弯曲刚度 k_b、径向压缩刚度 k_a、剪切刚度 k_s 和轮体刚度 k_f，则齿轮副总刚度为

$$k_t=k_{t,1}+k_{t,2}=$$

表 1 系数的取值

Table 1 Value of coefficient

系数	L^*	M^*	P^*	Q^*
A	-5.574×10^{-5}	60.111×10^{-5}	-50.952×10^{-5}	$-6.204\,2\times10^{-5}$
B	$-1.998\,6\times10^{-3}$	28.100×10^{-3}	185.50×10^{-3}	$9.088\,9\times10^{-3}$
C	$-2.301\,5\times10^{-4}$	-83.431×10^{-4}	$0.053\,8\times10^{-4}$	$-4.096\,4\times10^{-4}$
D	$4.770\,2\times10^{-3}$	$-9.925\,6\times10^{-3}$	53.300×10^{-3}	$7.829\,7\times10^{-3}$
E	0.027 1	0.162 4	0.289 5	−0.147 2
F	6.804 5	0.908 6	0.923 6	0.690 4

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{k_{h,i}}+\frac{1}{k_{b1,i}}+\frac{1}{k_{s1,i}}+\frac{1}{k_{a1,i}}+\frac{1}{k_{f1,i}}}+\frac{1}{\frac{1}{k_{b2,i}}+\frac{1}{k_{s2,i}}+\frac{1}{k_{a2,i}}+\frac{1}{k_{f2,i}}}\right) \tag{17}$$

先分别求解式(7)、(9)、(11)、(13)和(15)，再将结果代入式(17)，即可求得各刚度成分和齿轮总啮合刚度. 图 6 为改进能量法与文献[5]的传统能量法啮合刚度结果比较; 图 7 为改进能量法与有限元法的啮合刚度结果比较. 从结果可知，轮体刚度对总刚度的影响很大，改进后的能量法的计算精度明显提高，与有限元法所得结果能很好吻合，其相对误差小于 1%.

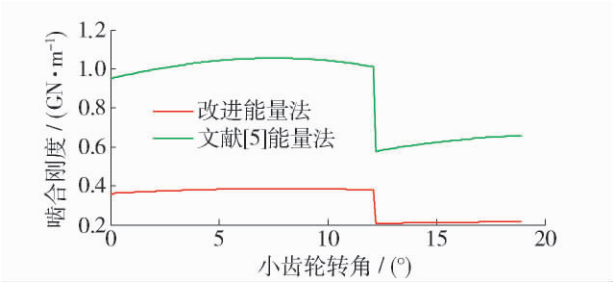

图 6　轮体刚度对啮合刚度的影响

Fig. 6　Tooth base stiffness' influence on mesh stiffness

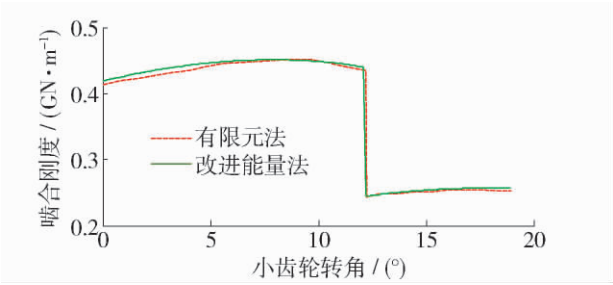

图 7　有限元法、改进能量法正常齿轮啮合刚度比较

Fig. 7　Comparison between finite element method and improved energy method on the calculation of the normal gear mesh stiffness

2.2　计算实例

为验证本文所提方法，用该方法计算了小齿轮含单齿齿根裂纹故障时的齿轮副啮合刚度. 裂纹特征: 裂纹在齿根附近且沿着齿宽的深度是常数 $q = 3$ mm. 裂纹轮齿三维示意图如图 8 所示.

设定小齿轮为主动轮，逆时针方向旋转; 齿轮副啮合初始位置为齿轮副刚进入双齿啮合区时的临界位置，裂纹故障轮齿为小齿轮的左边第 1 个未进入啮合状态的轮齿. 先用修正能量法计算正常部位啮合刚度，根据前述齿轮副啮合状态可知，在齿轮副的 1 个旋转周期内，除了第 2 和第 3 个啮合周期之外，其他啮合周期都为无故障啮合状态，即啮合刚度都为无故障啮合刚度，1 个啮合周期的啮合刚度如图 7 所示; 再用有限元法求解齿轮故障部位，即第 2 和第 3 个啮合周期的啮合刚度，如图 9 所示; 最后应用 MATLAB 编程将正常部位啮合刚度数据和故障部位啮合刚度数据结合即可求得故障齿轮完整啮合刚度，如图 10 所示为所得齿轮副 1 个旋转周期的完整时变啮合刚度曲线. 本实例中，应用上述同一台计算机，综合计算方法求解故障齿轮旋转 1 周的啮合刚度的计算时间约为 630 min，相比于有限元法的 1 200 min，综合计算方法的速度是原有限元法的 1.9 倍左右.

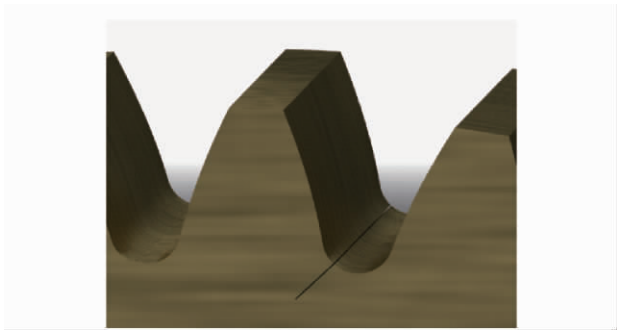

图 8　裂纹齿轮三维示意图

Fig. 8　3D schematic diagram of crack gear

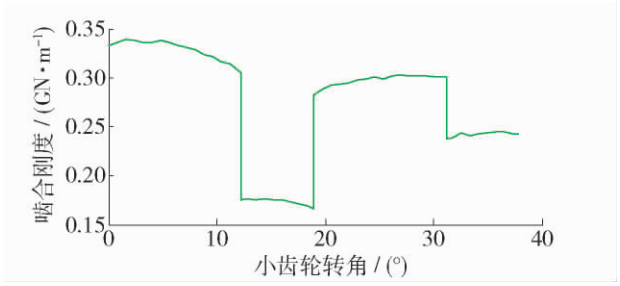

图 9　有限元法计算齿根裂纹故障部位啮合刚度

Fig. 9　Calculation of the mesh stiffness of fault position of gears with tooth root crack using finite element method

将用本文的方法计算得到的含齿根裂纹时的齿轮副啮合刚度应用到八自由度一级齿轮传动系统动力学模型中[5]，对系统动力学方程进行求解后得到含主动轮齿根裂纹故障时系统的振动响应时域图，如图 11 所示. 从图 11 中能明显地识别出齿轮故障部位，该特征与文献[5]基本符合.

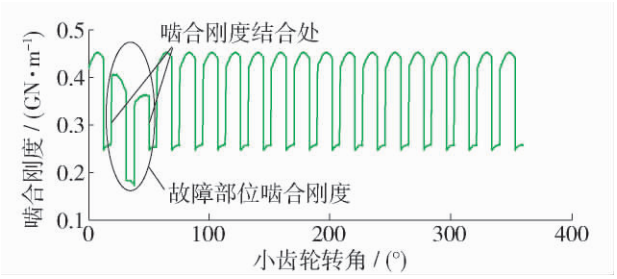

图 10 含齿根裂纹故障齿轮的啮合刚度

Fig. 10 Mesh stiffness of gears with a crack in root

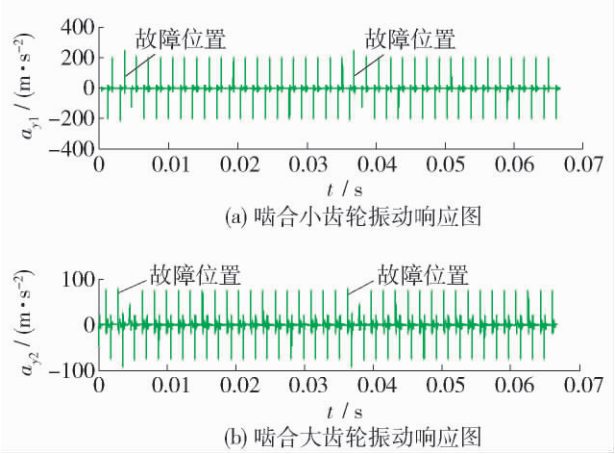

图 11 含齿根裂纹故障齿轮振动响应仿真

Fig. 11 Vibration response simulation chart of gear with tooth root crack

3 结论

1) 用有限元法和能量法计算了无故障齿轮时变啮合刚度. 并以国家标准方法为基准,比较了 2 种方法的有效性和准确性. 结果表明,有限元法的准确度较好,与基准值的误差仅在 0.9% 左右; 能量法的计算准确性比有限元法差,但其计算速度是有限元法的 20 倍左右.

2) 针对故障齿轮的齿轮时变啮合刚度求解问题,提出了结合修正能量法和有限元法的方法. 利用该方法计算了主动轮含齿根裂纹的齿轮时变啮合刚度,得到了相应的系统振动响应仿真结果. 结果表明,该方法能高效精确地计算出故障齿轮的时变啮合刚度及其系统的振动响应仿真结果,相比原传统能量法极大地提高了计算准确度,可计算复杂形状的故障齿轮,相比原有限元法,提高了计算效率.

参考文献:

[1] 唐进元,颜海燕. 线外啮合齿轮传动啮合刚度计算[J]. 机械传动,2002,26(4): 22-24.
TANG Jin-yuan, YAN Hai-yan. Gear mesh stiffness based on coner contact [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2002, 26(4): 22-24. (in Chinese)

[2] 王龙宝,王贵成,王志. 直齿圆柱齿轮啮合刚度的影响因素及其规律性[J]. 工具技术,2007,41(4): 44-48.
WANG Long-bao, WANG Gui-cheng, WANG Zhi. Influencing factors and regularity of meshing stiffness of spur gears [J]. Tool Engineering, 2007, 41(4): 44-48. (in Chinese)

[3] MUNRO R G, PALMER D, MORRISH L. An experimental method to measure gear tooth stiffness throughout and beyond the path of contact [J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2001, C7 (215): 793-803.

[4] 卜忠红,刘更,吴立言,等. 基于线性规划法的齿轮啮合刚度与载荷分布计算的改进方法[J]. 机械科学与技术,2008,27(11): 1365-1368.
BU Zhong-hong, LIU Geng, WU Li-yan, et al. A modified method for determining the mesh stiffness and load distribution of a cylinder gear based on linear programming [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2008, 27(11): 1365-1368. (in Chinese)

[5] TIAN Xin-hao. Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults [D]. Alberta Department of mechanical Engineering, University of Alberta, 2004.

[6] 安春雷,韩振南. 点蚀与剥落对齿轮扭转啮合刚度影响的分析[J]. 振动、测试与诊断,2008,28(4): 354-357.
AN Chun-lei, HAN Zhen-nan. Analysis of the influence of pitting and spalling on torsional mesh stiffness of gears [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2008, 28(4): 354-357. (in Chinese)

[7] 中国国家标准化管理委员会. GB/T3480—1997 中国机械工业标准[S]. 北京: 中国标准出版社,2005.

[8] CHAARI F, FAKHFAKH T, HADDAR M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness [J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2009, 28(3): 461-468.

(责任编辑 刘 潇)