

复线性方程求解问题的研究 ——用模态力法分析高速机床主结构

邢统坤 马春敏 陈卫福

(北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 北京 100022)

摘 要 对利用模态力法在数控机床动态分析中产生的复线性方程的求解进行了探讨,提出了实现高效求解的整体处理方法,和把实域中处理高维矩阵的各种方法推广到实域中的条件确认。

关键词 模态力法, 动态分析, 复线性方程, 高速机床

分类号 TH 122 A

0 引言

近 10 年来,数控机床高速化发展异常迅速。由于高速切削技术、主轴轴承、控制和驱动技术的长足进步,促使数控机床的主轴转速、轴向行程的速度和加速度大幅度提高,致使机床可以采用现代刀具以很高的切削速度和送给速度进行高速加工,使其制造能力比 10 年前提高了 5~10 倍,从而大大缩短了基本加工时间。通过功能部件的快速移动、定位和换刀,显著缩短辅助时间。同时,由于采用了高速切削技术,降低了切削力,明显改善了被加工表面的质量。对于如此高性能的机床,在设计开发阶段,正确预测整机的设计性能是保证机床设计质量,提高开发一次成功率的关键技术。作为精密制造设备的数控机床,必须要有高的动刚度。从目前的调查发现,凡开发失败的机床大多是因为动刚度不能满足产品要求。现代高速数控机床对动态性能的要求比传统数控机床提高 5~10 倍。这一切说明了研究与解决机床动态设计极为重要。

子结构方法的基本思想是把一个复杂结构,按其特点分成若干个子结构,首先对各子结构进行有限元分析,然后根据各子结构间的界面连接条件建立系统动力方程,其阶数基本上仅与接口界面上结点的自由度数或零件的低阶模态数有关,对于一台机床来说一般不会超过 1 000,求解该方程便可获得整个系统的特征问题和动力响应问题。虽然各子结构的自由度总和等于整机自由度数,但子结构动力方程的矩阵带宽远远小于整机动力方程中的矩阵带宽,因而用它完成整机的动力分析所需的机时比整体有限元法少得多。一台计算机只要有能力完成零件的动力分析,就有能力完成整机的动力分析。同时,在设计过程的结构优化迭代中,凡结构不发生变化的零件,就不必进行重分析,可以大大缩短设计开发周期。从解决问题所采用的方式看,一般可将子结构方法分成^[1]模态综合法;界面位移综合法;迁移子结构等方法。目前模态综合法使用最为普通,界面位移综合法在机床设计中也有应用,其他方法原则上不太适合于机床设计。

1 模态力法^[2]

本文旨在通过有限元和模态综合法中的模态力法来完成机床的动态分析。

1.1 子结构的模态特性

求解系统的动态性能时,它的动力方程是:

收稿日期: 2000-12-29

基金项目: 国家“863”基金资助项目(9842-013)

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f \quad (1)$$

子结构作为一个多自由系统,从其动力方程,可得到如下的无阻尼自由振动方程

$$(K - \lambda M)u = 0 \quad (2)$$

式中 $\lambda = \omega^2$,称为特征值.要使上式获得非零解的充要条件是系数行列式的值为0,即特征方程 $|K - \lambda M| = 0$,由该方程可解出特征值 λ_i ,由线性代数中的有关定理,对于 n 阶正定矩阵 M 与半正定矩阵 K ,此特征方程具有 n 个不小于0的实数根.特征值按升序排列有:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \quad \text{或} \quad 0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n \quad (3)$$

式中 λ_i 称为系统的第 i 阶特征值, ω_i 称为系统的第 i 阶固有频率或称主频率, n 为子结构自由度数,当 K 正定时,系统的全部特征值大于0.如果 n 个特征值中,当 λ_i 为 r 重根时, $(K - \lambda_i M)$ 的秩为 $(n - r)$,即在式(2)中只有 $(n - r)$ 个方程是独立的.

满足式(2)的非零向量 u 称为特征向量,对应于 λ_i 的特征向量 u 用 φ_i 表示,称为系统的第 i 阶主模态,工程中通常称为主振型,简称振型.

设 $\psi_i = \alpha \varphi_i$,将其代入式(2)后不难发现只要 α 为不等于0的实数, ψ_i 也是对应于 λ_i 的主模态,因此对应于 λ_i 的主模态是不唯一的.系统的固有振动不是一种真实状态的振动,它仅仅反映系统的一种固有特性,是在无外部激振力的条件下,系统可能发生的振动状态的集合,当系统处于某一固有振动状态时,在任何时刻各自由度的位移之比是保持不变的.为了应用方便,通常使 φ_i 满足下列条件:

$$\varphi_i^T M \varphi_i = 1 \quad (4)$$

这时 φ_i 称为正则主模态或正则振型.

令 $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n]$,称为系统的主模态矩阵($n \times n$ 阶方阵),则

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (5)$$

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (6)$$

$$\text{式中} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \quad (7)$$

1.2 子结构的模态坐标变换

如果已经获得了子结构的主模态,那么系统的振动位移可表示为这些主模态向量的线性叠加

$$u = \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i = \Phi q \quad (8)$$

式中 q_i 称为第 i 阶主模态坐标,它表示 i 阶主模态对系统动力响应的贡献大小.

式(8)表示从物理坐标系向模态坐标系转换的相互对应关系,称为模态坐标变换.由此式所定义的坐标 q 是以 n 维空间的 n 阶主模态为基张成的模态空间中的坐标,称为系统的主模态坐标.

把式(8)代入式(1),可得

$$(K - \omega^2 M) \Phi q = f$$

$$\Phi^T (K - \omega^2 M) \Phi q = \Phi^T f$$

式中 ω 为激振力的角频率.

将式(5)和(6)代入上式可得

$$(\Lambda - \omega^2 I) q = \Phi^T f \quad (9)$$

式(9)所表示的系统动力方程是一个在模态空间中完全解耦的方程组,也就是

$$(\lambda_i - \omega^2) q_i = \bar{f}_i \quad (i = 1, \cdots, n) \quad (10)$$

式中 $\bar{f} = \Phi^T f$

1.3 模态力法

首先求出各零件的前 k 阶低阶模态,模态矩阵 $\Phi_k^{(s)}$ 和特征值矩阵 $\Lambda_k^{(s)}$ (上标 s 表示零件号),由式(6)得到

$$q_k^{(s)} = [\Lambda_k^{(s)} - \omega^2 I]^{-1} \Phi_k^{(s)T} f^{(s)} \quad (11)$$

由式(8)得到

$$\mathbf{u}^{(s)} \approx \Phi_k^{(s)} [\Lambda_k^{(s)} - \omega^2 \mathbf{I}]^{-1} \Phi_k^{(s)\top} \mathbf{f}^{(s)} = \mathbf{H}_k^{(s)}(\omega) \mathbf{f}^{(s)} \quad (12)$$

式中

$$\mathbf{H}_k^{(s)}(\omega) = \Phi_k^{(s)} [\Lambda_k^{(s)} - \omega^2 \mathbf{I}]^{-1} \Phi_k^{(s)\top}$$

忽略了零件的高阶模态会带来较大的误差,需要对 $\mathbf{H}_k(\omega)$ 进行修正。下式是计算 $\mathbf{u}^{(s)}$ 的精确公式:

$$\mathbf{u}^{(s)} = \Phi^{(s)} [\Lambda^{(s)} - \omega^2 \mathbf{I}]^{-1} \Phi^{(s)\top} \mathbf{f}^{(s)} = \mathbf{H}^{(s)}(\omega) \mathbf{f}^{(s)} \quad (13)$$

式中

$$\mathbf{H}^{(s)}(\omega) = [\Phi_k^{(s)}, \Phi_d^{(s)}] \begin{bmatrix} [\Lambda_k^{(s)} - \omega^2 \mathbf{I}]^{-1} & 0 \\ 0 & [\Lambda_d^{(s)} - \omega^2 \mathbf{I}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_k^{(s)\top} \\ \Phi_d^{(s)\top} \end{bmatrix} = \Phi_k^{(s)} [\Lambda_k^{(s)} - \omega^2 \mathbf{I}]^{-1} \Phi_k^{(s)\top} + \Phi_d^{(s)} [\Lambda_d^{(s)} - \omega^2 \mathbf{I}]^{-1} \Phi_d^{(s)\top}$$

其中 $k + d = n_s$ (n_s 是零件的自由度总数)。

$\mathbf{H}^{(s)}(\omega)$ 为零件 s 的频响应函数矩阵。

根据结点类型把位移向量 $\mathbf{u}$ 按内部自由度、外载荷自由度及结合面自由度排序,因而式(13)写成分块矩阵形式,得到

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{(s)} \\ \mathbf{u}_e^{(s)} \\ \mathbf{u}_j^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii}(\omega) & \mathbf{H}_{ie}(\omega) & \mathbf{H}_{ij}(\omega) \\ \mathbf{H}_{ei}^T(\omega) & \mathbf{H}_{ee}(\omega) & \mathbf{H}_{ej}(\omega) \\ \mathbf{H}_{ji}^T(\omega) & \mathbf{H}_{ji}^T(\omega) & \mathbf{H}_{jj}(\omega) \end{bmatrix}^{(s)} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_e^{(s)} \\ \mathbf{f}_j^{(s)} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

根据图 1、图 2,对结合面之间的关系分析,可以得到如下动力学方程的式子:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{ji} + i\omega \mathbf{C}_{ji}] \{\mathbf{u}_{ji}^{(1)} - \mathbf{u}_{ji}^{(2)}\} &= -\mathbf{f}_{ji}^{(1)} \\ \mathbf{u}_{ji}^{(s)} &= \{\mathbf{u}_{ji1}^{(s)} \ \mathbf{u}_{ji2}^{(s)} \ \Lambda \ \mathbf{u}_{jip}^{(s)}\}^T \\ \mathbf{f}_{ji}^{(s)} &= \{\mathbf{f}_{ji1}^{(s)} \ \mathbf{f}_{ji2}^{(s)} \ \Lambda \ \mathbf{f}_{jip}^{(s)}\} \end{aligned} \quad (15)$$

式中:

$$\mathbf{K}_{ji} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ji} & & \\ & \mathbf{k}_{ji} & \\ & & 0 \\ & & & \mathbf{k}_{ji} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{ji} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{ji} & & \\ & \mathbf{c}_{ji} & \\ & & 0 \\ & & & \mathbf{c}_{ji} \end{bmatrix}$$

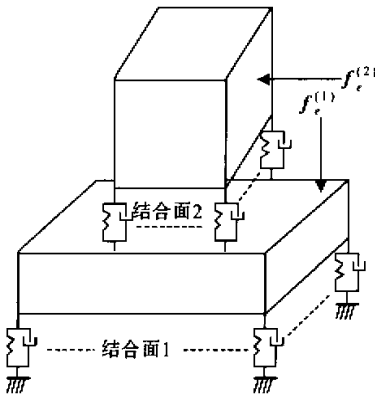


图1 机械结构系统简例

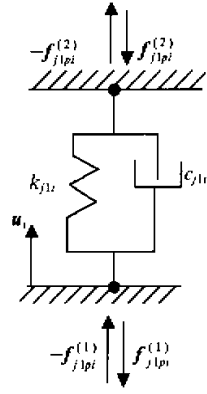


图2 结合面单元模型

根据零件间结合面方程(15)建立系统的动力学方程,以图 1 为例可以得到如下各式

$$\begin{Bmatrix} u_f^{(1)} \\ u_e^{(1)} \\ u_{j1}^{(1)} \\ u_{j2}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ff}^{(1)} & H_{fe}^{(1)} & H_{fj1}^{(1)} & H_{fj2}^{(1)} \\ H_{ef}^{(1)T} & H_{ee}^{(1)} & H_{ej1}^{(1)} & H_{ej2}^{(1)} \\ H_{j1f}^{(1)T} & H_{j1e}^{(1)T} & H_{j1j1}^{(1)} & H_{j1j2}^{(1)} \\ H_{j2f}^{(1)T} & H_{j2e}^{(1)T} & H_{j2j1}^{(1)T} & H_{j2j2}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ f_e^{(1)} \\ f_{j1}^{(1)} \\ f_{j2}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} u_f^{(2)} \\ u_e^{(2)} \\ u_{j2}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ff}^{(2)} & H_{fe}^{(2)} & H_{fj2}^{(2)} \\ H_{ef}^{(2)T} & H_{ee}^{(2)} & H_{ej2}^{(2)} \\ H_{j2f}^{(2)T} & H_{j2e}^{(2)T} & H_{j2j2}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ f_e^{(2)} \\ f_{j2}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

由式(15)可得

$$u_{j1}^{(1)} = -[K_{j1} + i\omega C_{j1}]^{-1} f_{j1}^{(1)} \quad (18)$$

$$u_{j2}^{(1)} - u_{j2}^{(2)} = -[K_{j2} + i\omega C_{j2}]^{-1} f_{j2}^{(1)} \quad (19)$$

$$f_{j2}^{(2)} = -f_{j1}^{(1)} \quad (20)$$

由式(16),可得:

$$u_{f1}^{(1)} = H_{ef1}^{(1)T} f_e^{(1)} + H_{j1f1}^{(1)} f_{j1}^{(1)} + H_{j1f2}^{(1)} f_{j2}^{(1)} \quad (21)$$

$$u_{f2}^{(1)} = H_{ef2}^{(1)T} f_e^{(1)} + H_{j1f2}^{(1)T} f_{j1}^{(1)} + H_{j2f2}^{(1)T} f_{j2}^{(1)} \quad (22)$$

由式(17)可得:

$$u_{j2}^{(2)} = H_{ej2}^{(2)T} f_e^{(2)} + H_{j2j2}^{(2)} f_{j2}^{(2)} \quad (23)$$

将式(18)代入式(21)

$$(H_{j1f1}^{(1)} + [K_{j1} + i\omega C_{j1}]^{-1}) f_{j1}^{(1)} + H_{j1f2}^{(1)} f_{j2}^{(1)} = -H_{ef1}^{(1)} f_e^{(1)} \quad (24)$$

将式(19)、(20)代入式(22)

$$(H_{j2f2}^{(1)} + H_{j2f2}^{(2)} + [K_{j2} + i\omega C_{j2}]^{-1}) f_{j2}^{(1)} + H_{j1f2}^{(1)T} f_{j1}^{(1)} = -H_{ef2}^{(1)} f_e^{(1)} + H_{ej2}^{(2)} f_e^{(2)} \quad (25)$$

合并式(24)、(25),获得该机械系统的动力学方程:

$$\begin{bmatrix} H_{j1f1}^{(1)} + [K_{j1} + i\omega C_{j1}]^{-1} & H_{j1f2}^{(1)} \\ H_{j1f2}^{(1)T} & H_{j2f2}^{(1)} + H_{j2f2}^{(2)} + [K_{j2} + i\omega C_{j2}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{j1}^{(1)} \\ f_{j2}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -H_{ef1}^{(1)} f_e^{(1)} \\ -H_{ef2}^{(1)} f_e^{(1)} + H_{ej2}^{(2)} f_e^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

简记为:

$$\bar{H}(\omega) \bar{f}_j = \bar{f}_e \quad (27)$$

称 $\bar{H}(\omega)$ 为系统模态力矩阵, $\bar{f}_j$ 为系统模态力向量。式(27)的维数,为系统结合面自由度数,比模态位移法的动力学方程组的维数要小,计算简单,分析效率和精度更高。令 $\bar{f}_e = 0$ 则式(27)变成自由振动方程:

$$\bar{H}(\omega) \bar{f}_j = 0 \quad (28)$$

2 复系数线性方程组 $\bar{H}(\omega) \bar{f}_j = \bar{f}_e$ 求解的研究

在利用上述方法分析如图3所示的TH6950高速机床时,方程(27)中的复矩阵 $\bar{H}(\omega)$ 的维数为:600×600,在采用把复数矩阵转换到实域中按实部等于实部,虚部等于虚部计算时,在配置为主频450 M,内存128 M的品牌机上,计算用时竟然达到15 min,这是非常不经济的。为了提高运算效率,以下就数学建模、算法实现与复系数线性方程组的求解等方面进行了探讨。

2.1 数学建模

这里提出的建模方法的中心观点是:复数的问题要在复域中建立数学模型。首先,考察一下笛卡尔直

角坐标系;它由2根正交的一维坐标轴组成一个二维平面,平面中的任何一点都可以用2个坐标唯一表示,而实域中的所有数都可以表示在坐标轴上。如图4所示的坐标,它由2个正交的平面组成,2个二维的平面组成一个唯一的三维空间,其中的任意一点可以利用2个坐标面上的点唯一表示。这里,分别把2个坐标面称为 X 面和 Y 面,则三维中的任意一点,可以利用 X 面、 Y 面上的坐标表示为 $A(X, Y)$ 。这样,把面中坐标指向的半个平面称为正半平面。从直角坐标系的观点推广过来,是可以理解的。第1个由轴组成的坐标系,称为实域中的坐标系,因为它的轴是表示所有实数。它是一个三维的空间中的概念。同样,可以从四维的观点来看待第2个坐标系,称它为复域坐标系,每一个复数都是坐标面上的一个点。这里的每个点与复域中的一个数唯一对应,相应的,复域中的所有数都可以表示在这一坐标面上。



图3 TH6905卧式加工中心虚拟样机图

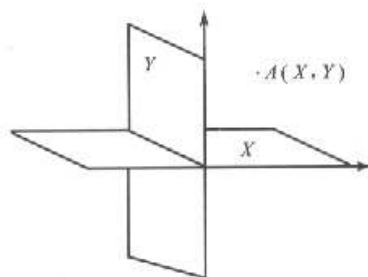


图4 复坐标系

这个结论非常重要,因为,这时的视角已经从实域范围,提升到了复域范围。在复域范围中,数的不可分概念,已经不是 $x(1)$ 、 $y(2)$ 、 $z(3)$,而是 $X(a+bj)$ 、 $Y(c+dj)$ 、 $Z(e+fj)$ 。因此,在处理复域中的问题时,不再是: $(a+bj) + (c+dj) = (a+c) + (b+d)j$,而是: $A+B=C$;同样对于乘法和乘方等别的运算,不是: $(a+bj) \times (c+dj) = (ac-bd) + (ad+bc)j$,而是: $A \times B=C$ 。这样,在处理复数问题时,就应该以一个整体的概念来建立数学模型,以便于在适用条件认定无误的情况下,把实域中的建模方法,应用到复域中来,建立复域中的数学模型。其实,前面举的几个例子,就是建模思想的一种转化。但计算机如何支持这种建模,就涉及到具体实现的问题。

2.2 算法的实现

采用计算机语言“Fortran90”来实现这一算法思想,它支持“complex”关键字,即它已经实现了和实数、整数等的同等的计算层次。同时,采用这种语言编程,具有以下2个优点:第1,提高了计算效率,减少计算用时;第2,缩小编程量,提高程序的简洁性和可读性。

可能有这样一种担心,在一个Windows界面流行VB、VC成为主要编程语言的世界中,利用Fortran90做的程序有没有生命力。这种担心是完全没有必要的。首先,这种语言支持Quick Windows、Windows Application编程,可以作出Windows界面;其次,它有2种方法可以方便地和VB、VC等流行的Windows界面程序接口,第1种方法是作成动静态连接库,供其他高级语言调用;第2种方法是对于VC来讲,可以在“.obj”层次实现联合汇编,具有同种语言的便利和效率。

2.3 求解复系数线性方程组

工程中关于线性规划的问题不计其数,关于复系数的线性方程组也很常见。对于矩阵的处理,在实域中有许多方法,例如,对于一般的矩阵,可以采用“QR分解法”处理^[3];对于对称矩阵,可以采用“LD法”处理等^[3]。这种限定条件要求不强的实例,实域中的处理方法就可以直接推广到复域中,但是,对于一些条件要求强的实例,适用条件的认定,就显得非常重要。

在实域中,对于对称正定矩阵的认定有2个条件:一是对称;二是正定。在推广过程中,对于第1个条件的认定是非常容易的。关键是如何认定复域中的正定。这里,还是从多维空间的角度去研究这个问题。首先,来研究一下实域中矩阵正定,条件是各阶主子式为正值,即落在坐标轴的正半轴上。在复域坐标中,与实域坐标中的正半坐标轴对应的是复数的幅角主值为 $0\sim 180^\circ$ 的正半平面,所以,各阶主子式幅角主值为 $0\sim 180^\circ$ 的复矩阵,对应于实域中的正定矩阵,这样的复矩阵可称为正定的。有了这一条件的认定,在实际的应用中就可以把实域中的处理方法推广到复域范围。

利用上述推广,对前面所说的 600×600 的复矩阵,采用对称正定矩阵的“LQ方法”处理,大大降低了计算用时,不足5 min的时间,在同一台计算机上,就完成了这一复线性方程组求解,所得结果和以前采用的在实域之中处理的结果相比,差异是在0.1%的级别上,因此,采用这种建模方法及其实现,在工程实践中具有重要意义。

参 考 文 献

- 1 殷学钢,陈淮,蹇开林,等.结构振动分析的子结构法.北京:中国铁道出版社,1991
- 2 陈卫福,孙建光,范晋伟,等.模态力法用于机床结构系统动态分析的研究.北京工业大学学报,2000,26(1):53~57
- 3 许士良.FORTRAN常用算法程序集,第2版.北京:清华大学出版社,1995

On the Solution of Complex Linear Equations in the Modal Force Analysis on the Main Structure of Speed Machine Tool

Xing Tongkun Ma Chunmin Chen Weifu

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology,
Beijing Polytechnic University, Beijing 100022)

Abstract An exploration is made for the solution-finding of the complex linear equations produced from the dynamic analysis on the NC machine tools by the method of modal force. A global treatment method for effective solution-finding is proposed, and the various methods to treat the high-dimensional matrix in real field is extended to the condition affirmation in real field.

Keywords modal force method, dynamic analysis, complex linear equations, speed machine tool