

# 宏观交通流模型参数标定方法

邵长桥, 郭 杰, 刘小明

(北京工业大学交通工程北京市重点实验室, 北京 100124)

**摘要:** 为了提高交通流模型整体估计精度,对交通流模型参数估计方法进行了研究. 针对密度-速度、密度-流量以及速度-流量模型之间的关联性以及交通流观测数据分布特征对模型估计精度的影响,提出了联合模型参数估计方法,并给出了联合模型参数估计优化目标函数的表达形式及约束条件. 以 Castillo-Benítez 和 Van Aerde 模型为例,基于北京市二环快速路实测数据对联合模型参数估计方法可行性及参数估计效果进行了验证;构建了加权判定系数,并结合平均绝对百分比误差(mean absolute percentage error, MAPE)和平方根误差(root mean squared error, RMSE)评价联合模型估计效果. 结果表明,对 Castillo-Benítez 模型而言,由单一模型计算的速度、流量估计 MAPE 分别是 19.8% 和 18.7%,基于联合模型计算的速度、流量 MAPE 分别下降为 10.0% 和 10.0%,模型总体判决系数由 0.913 变化为 0.910;对 Van Aerde 模型而言,由单一模型计算的密度、流量估计 MAPE 分别为 16.4% 和 16.3%,基于联合模型计算的密度、流量 MAPE 分别为 14.2% 和 14.2%,模型总体判决系数由 0.732 变为 0.749.

**关键词:** 交通工程; 参数估计; 联合模型参数估计方法; 交通流模型; 交通流理论

中图分类号: U 491

文献标志码: A

文章编号: 0254-0037(2022)12-1298-09

doi: 10.11936/bjtxb2021110029

## Methodology of Parameter Calibration for Macroscopic Traffic Flow Models

SHAO Changqiao, GUO Jie, LIU Xiaoming

(Beijing Key Laboratory of Traffic Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** To improve the coherent whole precision of traffic flow stream models, the methodology of parameter calibration was studied. The joint-prediction model parameter estimate method was developed considering the correlation among density-speed, density-volume and speed-volume relationship, and the optimal functions were constructed in the light of principle of minimum sum of squares of estimation deviation and the roles of different dependent and independent variables in the traffic flow stream models. To demonstrate the feasibility and efficiency of joint-prediction model calibration method on the estimate precision, the Castillo-Benítez's model and Van Aerde's model were selected and the field data on the Beijing 2nd ring were used to calibrate the model parameters. The weighted determination coefficient was suggested and combined with mean absolute percentage error (MAPE) and root mean squared error (RMSE) were used to evaluate the model parameter estimate efficiency. Results show that for the Castillo-Benítez's model, the MAPEs of speed and volume calculated from single prediction model are 19.8% and 18.7%, respectively. The values calculated from joint-prediction model are 10.0% and 10.0%, respectively, and the determination coefficients change from 0.913 to 0.910. For the Van

收稿日期: 2021-11-25; 修回日期: 2022-07-08

基金项目: 国家“973”计划资助项目(2012CB723303)

作者简介: 邵长桥(1972—), 男, 副教授, 主要从事交通流理论、道路通行能力、施工交通组织和交通数据分析方面的研究,

E-mail: shaocq@bjut.edu.cn

Aerde's model, the MAPEs of density and volume calculated from single prediction model are 16.4% and 16.3%, respectively. While the values calculated from joint-prediction model are 114.2% and 14.2%, respectively, and the determination coefficients change from 0.732 to 0.749.

**Key words:** traffic engineering; parametric estimation; joint-prediction model parameter estimate method; traffic flow model; traffic flow theory

密度-速度、密度-流量、速度-流量关系被称为交通流基本模型,其在交通流理论研究和应用中具有重要的作用.一是可以通过建立交通流模型来刻画交通流运行规律,为交通预测和控制提供方法;二是可以根据交通流模型对交通流特征参数进行估计,例如应用基本图模型估计道路设施通行能力、临界速度等<sup>[1]</sup>,为交通规划和运行分析提供基础参数.正是鉴于交通流基本模型的重要性,研究人员在交通流模型和模型参数标定方面进行了大量研究,不断地寻求预测或估计精度更高的建模方法.最早的交通流模型可以追溯到格林息尔治提出的线性密度-速度模型<sup>[2]</sup>.其后,研究人员提出了众多交通流模型,并不断用观测数据对交通流模型进行验证,以选择出更好的模型<sup>[3-12]</sup>.一方面,研究人员通过引入更多的参数来提高模型的灵活性和适用性,如 Van Aerde 等<sup>[10]</sup>在速度-车头间距(密度)模型中引入了 4 个参数,Wang 等<sup>[11]</sup>在密度-速度曲线模型中引入了 5 个参数.另一方面,研究人员对单结构模型提出了质疑,认为其不能同时刻画非拥堵和拥堵状态下交通流特性,并提出了分段的密度-速度模型<sup>[13]</sup>,如马晓龙等<sup>[14]</sup>基于生长曲线原理建立了 Logistic 密度-速度关系模型,并应用实测数据对模型参数进行了标定.

然而,交通流模型对数据拟合不充分的原因不仅仅是模型选择的问题,还与模型参数估计方法以及观测数据特征有关<sup>[13-16]</sup>.Qu 等<sup>[15]</sup>认为用最小二乘方法来估计模型参数会忽视观测数据“样本”分布不均衡性对模型参数估计影响,提出了加权最小二乘估计方法,并进一步指出了模型与数据拟合程度不理想不仅仅是模型问题,也与观测数据分布和估计方法有关.张辉等<sup>[16]</sup>和林豪等<sup>[17]</sup>从提高模型对观测数据拟合的角度,分别应用  $k$  均值聚类最小二乘方法与层次聚类最小二乘法来提高模型估计精度,研究结果说明了模型对数据拟合程度不仅与模型有关,还与参数估计方法有关.Rakha 等<sup>[18]</sup>考虑了流量、速度、密度 3 个基本变量的观测误差,提出了基于全变量偏差平方和最小的估计方法,但没有给出最优解的理论

证明,并且该方法需要开发专用算法,不便于推广和应用. Shao 等<sup>[19]</sup>综合考虑了因变量和自变量的观测误差,对 Van Aerde 模型<sup>[10]</sup>进行了修正,并给出了模型参数的极大似然估计方法,验证了新模型对观测数据具有更高的拟合精度. Zhang 等<sup>[20]</sup>在 Qu 等<sup>[15]</sup>的工作基础上,提出了对样本数据重构的方法来克服观测数据不均衡性对单段交通流模型参数估计的影响. Zhang 等<sup>[21]</sup>同样考虑速度、密度观测数据的不均衡性对密度-速度关系模型参数估计的影响,提出了应用排序重构样本的方法对模型参数进行了标定. Neila 等<sup>[22]</sup>考虑了拥堵和非拥堵状态下交通数据的散布情况,提出了基于数据特征的交通流基本图模型参数标定方法.

通过文献查阅发现,已有的宏观交通流模型以及参数估计更多地考虑了单一模型(即密度-速度、密度-流量和速度-流量关系模型中的一个)的估计精度问题<sup>[15-20]</sup>,仅有少数的文献注意到三者之间的内在关系对模型参数估计的影响<sup>[23-24]</sup>,特别是其衍生模型估计和预测精度下降问题. Duncam<sup>[23]</sup>注意到了基于经验的密度-速度关系模型变换得到的速度-流量模型存在拟合精度下降现象问题,但没有给出解决方法. Castillo<sup>[24]</sup>在对密度-速度模型参数标定时,考虑了密度-流量模型拟合优度问题,但没有对模型参数估计效果进行论证;没有考虑速度、流量的量纲对模型参数估计的影响.正是鉴于上述问题,本文假定速度、流量、密度中一个变量为自变量,另两个变量为因变量,提出了联合模型参数估计方法,构造了优化目标函数,并基于 Castillo-Benítez、Van Aerde 模型和实测数据验证了联合模型参数估计方法可提高模型对实测数据的拟合精度.

## 1 问题的描述

为了刻画交通流动态特性, Lighthill、Whitham 和 Richards 根据流体力学理论和流量守恒定律提出了著名的 LWR 模型<sup>[25-26]</sup>.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

并且满足基本关系式

$$q = k \cdot v \quad (2)$$

式中: $q$ 为流量,辆/h; $k$ 为密度,辆/km; $v$ 为区间平均速度.

研究表明,连续流设施的交通流存在平衡状态<sup>[9]</sup>,其速度-密度关系可以用连续函数<sup>[2-11]</sup>表示

$$v = f(k, \beta) \quad (3)$$

式中: $f(k, \beta)$ 为密度函数; $\beta$ 为模型参数(或参数向量).由式(2)(3)可以得到密度-流量关系式

$$q = f_1(k, \beta) \quad (4)$$

式中 $f_1(k, \beta) = k \cdot f(k, \beta)$ .在实际应用中,往往会出现这样的问题:由观测数据 $(k_i, v_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )估计理论模型(3)中参数 $\beta$ (其估计用 $\hat{\beta}$ 表示),把 $\hat{\beta}$ 代入模型(4)可得到的经验模型 $q = f_1(k, \hat{\beta})$ ,但 $q = f_1(k, \hat{\beta})$ 对实测数据拟合程度较低.其主要原因是 $\hat{\beta}$ 是基于速度-密度( $v-k$ )关系模型估计的,并没有考虑密度-流量( $q-k$ )关系.

由式(3)可得到速度-密度关系模型: $k = f^{-1}(v, \beta)$  ( $f^{-1}(\cdot)$ 为 $f(\cdot)$ 的逆函数),将其代入式(2)则可得到记 $q = v \cdot f^{-1}(v, \beta)$ .记 $f_2(v, \beta) = v \cdot f^{-1}(v, \beta)$ ,则速度-流量( $q-v$ )模型可表示为

$$q = f_2(v, \beta) \quad (5)$$

同样,把 $\hat{\beta}$ 代入模型(5)得到的 $v-q$ 经验模型也会存在模型估计精度问题.总之,仅由式(3)(4)或(5)中任何一个理论模型来估计模型参数,并通过 $q = k \cdot v$ 变换得到其他模型往往不能满足关联变量的预测或估计精度要求<sup>[15, 24-25]</sup>.因此,有必要结合密度-速度-流量宏观关系模型的上述关联特征,探索宏观交通流模型参数估计方法.正是基于上述思想,本文重点对宏观交通流模型的联合模型估计方法进行了探讨.

## 2 联合模型参数估计方法

传统的交通流模型参数标定主要是采用最小二乘法(包括非线性最小二乘法),优化目标为因变量观测数值与其估计值的总偏差平方和最小.为了叙述的方便,本文先介绍单一模型优化目标函数,然后再给出联合模型优化目标函数的构造方法.

### 2.1 单一模型优化目标函数

单一模型参数优化目标函数法就是选择式(3)(4)或式(5)中的一个模型对参数标定,然后应用 $q = k \cdot v$ 求出另外1个或2个关联模型.根据自变量和因变量的选择,可分为以下3种情形.

#### 1) 流量总偏差平方和最小

一般用于速度-流量或密度-流量宏观模型参数估计.模型假设速度 $v$ 或密度 $k$ 为自变量,交通流量 $q$ 为因变量,其优化目标和约束条件为

$$\min S = \sum_{i=1}^n (q_i - \hat{q}_i)^2 \quad (6)$$

$$\text{s. t. } q_i = f_1(k_i, \beta), i = 1, 2, \dots, n \quad (7a)$$

或

$$\text{s. t. } q_i = f_2(v_i, \beta), i = 1, 2, \dots, n \quad (7b)$$

式中: $q_i, \hat{q}_i$ 分别为流量的第 $i$ 观测值与估计值; $k_i$ 为密度的第 $i$ 观测值; $v_i$ 为速度的第 $i$ 观测值; $f_1(\cdot)$ 、 $f_2(\cdot)$ 分别为密度-流量函数、速度-流量函数; $\beta$ 为模型参数.应用式(6)作为优化目标,其假设误差主要来自于因变量 $q$ ,而自变量 $v$ 或 $k$ 是可精确测量或测量误差是可忽略的.

#### 2) 速度总偏差平方和最小

一般用于流量-速度或密度-速度宏观模型参数估计.模型假设 $k$ 或 $q$ 为自变量, $v$ 为因变量,基于最小二乘法的参数估计优化目标函数和约束条件为

$$\min S = \sum_{i=1}^n (v_i - \hat{v}_i)^2 \quad (8)$$

$$\text{s. t. } v_i = f(k_i, \beta), i = 1, 2, \dots, n \quad (9a)$$

或者

$$\text{s. t. } v_i = f_2^{-1}(q_i, \beta), i = 1, 2, \dots, n \quad (9b)$$

式中: $v_i, \hat{v}_i$ 分别为速度的第 $i$ 观测值与估计值; $f(\cdot)$ 、 $f_2(\cdot)$ 分别为密度-速度函数、速度-流量函数; $\beta$ 为模型参数.

同样,应用式(8)作为优化目标,则只考虑了因变量 $v$ 的观测误差,而忽略了自变量 $k$ 或 $q$ 的观测误差.

#### 3) 密度(车头间距)总偏差平方和最小

该方法常用于标定基于跟驰理论导出的速度-密度关系模型<sup>[19]</sup>,其假设密度(或车头间距)为因变量,速度为自变量.优化目标函数和约束条件为

$$\min S = \sum_{i=1}^n (k_i - \hat{k}_i)^2 \quad (10)$$

$$\text{s. t. } k_i = f^{-1}(v_i, \beta), i = 1, 2, \dots, n \quad (11a)$$

或

$$\text{s. t. } k_i = f_2^{-1}(q_i, \beta), i = 1, 2, \dots, n \quad (11b)$$

式中 $k_i, \hat{k}_i$ 分别为密度的第 $i$ 观测值与估计值.

单一模型参数优化方法的特点是模型中只有一个自变量和一个因变量,并假设误差主要是来自于因变量.其优点是模型参数标定方法相对简单,其

不足是参数估计过程忽略了变量之间关联性,没有考虑衍生模型或变换模型的估计精度<sup>[24]</sup>.

## 2.2 联合模型参数优化目标函数

针对单一模型参数优化方法存在的不足,可考虑联合模型参数优化方法.例如,文献[26]假定速度  $v$ 、流量  $q$  是密度  $k$  的函数:  $v = f(k, \beta)$ ,  $q = k \cdot f(k, \beta)$ , 建议对  $k-v$  模型  $v = f(k, \beta)$  进行参数估计时,同时考虑  $k-q$  模型  $q = k \cdot f(k, \beta)$  的估计精度. 根据速度、流量、密度三者关系以及模型参数估计需要,构建联合模型参数优化目标函数

$$\begin{aligned} \min S &= \sum_{i=1}^n [(v_i - \hat{v}_i)^2 + (q_i - \hat{q}_i)^2] \quad (12a) \\ \text{s. t. } &v_i = f(k_i, \beta), i = 1, 2, \dots, n \\ &q_i = f_1(k_i, \beta) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \min S &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{q_i - \hat{q}_i}{q} \right)^2 + \left( \frac{v_i - \hat{v}_i}{v} \right)^2 \right] \quad (12b) \\ \text{s. t. } &v_i = f(k_i, \beta), i = 1, 2, \dots, n \\ &q_i = f_1(k_i, \beta) \end{aligned}$$

或

$$\min S = \sum_{i=1}^n \sqrt{(v_i - \hat{v}_i)^2 (q_i - \hat{q}_i)^2} \quad (12c)$$

或

$$\min S = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left( \frac{v_i - \hat{v}_i}{v} \right)^2 \left( \frac{q_i - \hat{q}_i}{q} \right)^2} \quad (12d)$$

式中参数  $\bar{q}$ 、 $\bar{k}$  分别为流量和密度观测值的平均值.

式(12a)和式(12b)是把密度作为自变量,流量和速度作为因变量,采用了2个因变量总的偏差和作为优化目标;式(12c)和式(12d)采用了2个因变量总的偏差和的几何平均值为优化目标,在后文中会发现,可利用式(2)对式(12a)和式(12b)进一步化简. 式(12a)和式(12c)没有考虑不同变量量纲的影响,式(12b)和式(12d)考虑了数据量纲的影响. 同样,以速度作为自变量,流量和密度作为因变量来构造联合模型参数优化目标函数.

注意到  $q_i = k_i v_i$  和  $\hat{q}_i = k_i \hat{v}_i$ , 式(12d)可进一步表示为

$$\min S = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{v \cdot q} (v_i - \hat{v}_i)^2 \quad (13)$$

由式(13)可以发现,由式(12d)定义的优化目标函数为速度“加权”总偏差平方和,权函数为  $\frac{k_i}{v \cdot q}$ . 由交通流理论可知,非拥堵状态下,交通流密

度小,速度离散程度小;反之,拥堵状态下,交通流密度大,速度离散程度大. 因此,式(12d)考虑了不同运行状态下交通流观测数据散布特征,特别是拥堵状态下的数据离散特性对参数估计的影响.

从上面给出的优化目标函数可发现,式(6)~(10)是以单个交通流变量估计精度作为模型参数估计准则,没有考虑密度、速度、流量3个变量之间的相关性;式(12a)~(12d)以2个交通流变量估计精度作为模型估计准则,考虑了流量、速度、密度三者之间的关联性. 特别地,优化目标函数式(12d)可以结合加权最小二乘方法对模型参数进行估计.

同样的方法可以以速度为自变量,流量和密度为自变量构造优化目标函数,其将在案例分析中介绍.

## 3 案例分析

### 3.1 模型和优化目标函数选择

本研究以 Castillo-Benítez 模型<sup>[9]</sup>和 Van Aerde 模型<sup>[10]</sup>参数标定为例来说明单一模型、联合模型参数优化方法对模型估计精度的影响. Castillo-Benítez 模型首次引入了阻塞波波速来刻画拥堵对交通流的影响而受到关注<sup>[9]</sup>, Van Aerde 模型概括了 Greenshields 模型和 Pipes 模型的优点,并适用于刻画不同的交通设施的交通特性<sup>[27]</sup>.

Castillo-Benítez 密度-速度模型<sup>[9]</sup>为

$$v = v_f \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{|w_j|}{v_f} \left( \frac{k_j}{k} - 1 \right) \right] \right\} \quad (14)$$

式中:  $v_f$  为自由流速度, km/h;  $k_j$  为阻塞密度, 辆/km;  $w_j$  为阻塞波波速, km/h. 根据模型式(14)的特点,采用联合模型参数优化目标函数

$$\begin{aligned} \min S &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\left( \frac{v_i - \hat{v}_i}{v} \right)^2 \left( \frac{q_i - \hat{q}_i}{q} \right)^2} \quad (15a) \\ \text{s. t. } &q_i = k_i \hat{v}_i, i = 1, 2, \dots, n \\ &\hat{v}_i = \hat{v}_f \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{|\hat{w}_j|}{\hat{v}_f} \left( \frac{\hat{k}_j}{k_i} - 1 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

正如前所叙述,式(15a)可进一步表示为

$$\min S = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{v \cdot q} (v_i - \hat{v}_i)^2 \quad (15b)$$

对给定的观测数据  $q_i$ 、 $v_i$ 、 $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 均值  $\bar{q}$  和  $\bar{v}$  是固定的,因此,优化目标可进一步化简为

$$\min S = \sum_{i=1}^n (\sqrt{k_i} v_i - \sqrt{k_i} \hat{v}_i)^2 \quad (15c)$$

模型(15c)可以看作是模型(8)两边同乘以  $\sqrt{k_i}$ .

因此,模型(15a)~(15c)将加权非线性模型参数估计问题转化为非线性最小二乘估计问题,就可以采用成熟算法求解模型参数.

Van Aerde 模型<sup>[10]</sup>为

$$k = \frac{1}{c_1 + c_3 v + c_2 / (v_f - v)} \quad (16)$$

式中: $c_1 = \frac{v_f}{k_j v_c^2} (2v_c - v_f)$ ,  $c_2 = \frac{v_f}{k_j v_c^2} (v_f - v_c)^2$ ,  $c_3 = \frac{1}{q_c} - \frac{v_f}{k_j v_c^2}$ ,  $v_f$  为自由流速度, km/h;  $v_c$  为交通流量达到通行能力水平时的速度, km/h;  $q_c$  为通行能力, 辆/h;  $k_j$  为阻塞密度, 辆/km. 结合模型(16)的特点, 构造优化目标函数

$$\min S = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{k_i - \hat{k}_i}{\bar{k}}\right)^2 \left(\frac{q_i - \hat{q}_i}{\bar{q}}\right)^2} \quad (17a)$$

$$\text{s. t. } \hat{q}_i = \hat{k}_i v_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{k}_i = \frac{1}{\hat{c}_1 + \hat{c}_3 v + (\hat{c}_2 / (v_f - v_i))}$$

同样,把  $\hat{q}_i = \hat{k}_i v_i$  代入式(17a), 可得到

$$\min S = \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{k \cdot q} (k_i - \hat{k}_i)^2 \quad (17b)$$

式(17b)表明式(17a)定义的优化目标函数为

密度“加权”总偏差平方和, 权函数为  $\frac{v_i}{k \cdot q}$ . 同样, 非

拥堵状态下, 车辆速度大, 密度分布离散程度小; 拥堵状态下, 交通流速度小, 但车流运行波动大, 密度分布离散程度大. 相对于速度离散程度而言, 密度的波动相对较小. 因此, 式(17a)具有“均衡”交通运行状态对参数估计的影响. 同样, 对给定的观测数据  $q_i, v_i, k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 优化目标式(17b)可进一步化简为

$$\min S = \sum_{i=1}^n (\sqrt{v_i} k_i - \sqrt{v_i} \hat{k}_i)^2 \quad (17c)$$

同样, 模型(17c)可以看作是式(10)两边同乘以  $\sqrt{v_i}$ , 将加权非线性模型参数估计问题转化为非线性最小二乘估计问题.

根据上边的论述, 模型(14)与模型(16)的优化目标函数分别为式(15c)和式(17c), 可以采用模型变换的方式, 将问题转化为非线性最小二乘估计问题.

### 3.2 优化效果评价方法

在回归分析理论中, 常用判定系数  $R^2$  来度量模型对观测数据的拟合程度,  $R^2$  值越大, 说明模型对

观测数据拟合程度越好. 为了说明联合优化函数式(15a)和式(17a)或式(15b)与式(17b)对模型拟合效果的影响, 本研究应用加权判定系数度量模型拟合优度, 定义加权判定系数为

$$R_w^2 = w_v R_v^2 + w_q R_q^2 \quad (18)$$

式中:  $R_v^2, R_q^2$  分别为速度和流量拟合优度判定系数;  $w_v, w_q$  为权重.

$$w_v = \frac{1 / \sum \left(\frac{v_i - \hat{v}_i}{\bar{v}}\right)^2}{1 / \sum \left(\frac{v_i - \hat{v}_i}{\bar{v}}\right)^2 + 1 / \sum \left(\frac{q_i - \hat{q}_i}{\bar{q}}\right)^2},$$

$$w_q = \frac{1 / \sum \left(\frac{q_i - \hat{q}_i}{\bar{q}}\right)^2}{1 / \sum \left(\frac{v_i - \hat{v}_i}{\bar{v}}\right)^2 + 1 / \sum \left(\frac{q_i - \hat{q}_i}{\bar{q}}\right)^2} \quad (19)$$

$$R_v^2 = 1 - \frac{\sum (v_i - \hat{v}_i)^2}{\sum (v_i - \bar{v})^2},$$

$$R_q^2 = 1 - \frac{\sum (q_i - \hat{q}_i)^2}{\sum (q_i - \bar{q})^2} \quad (20)$$

式中:  $v_i, \hat{v}_i$  分别为速度观测值和估计值, km/h;  $q_i, \hat{q}_i$  分别为流量观测值和估计值, 辆/h;  $\bar{v}$  为实测速度均值, km/h;  $\bar{q}$  为实测流量数据的均值, 辆/h.

判定系数度量了模型对观测数据的拟合程度. 为了进一步量化模型估计精度, 并考虑到交通流观测数据的随机性, 本文同时应用平均相对误差 (mean absolute percentage error, MAPE) 和平方根误差 (root mean squared error, RMSE) 来度量观测值和估计值差异<sup>[28]</sup>, 式(21)、式(22)分别给出了流量估计的平均相对误差估计和平方根误差计算公式.

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum \frac{|q_i - \hat{q}_i|}{q_i} \times 100\% \quad (21)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (q_i - \hat{q}_i)^2} \quad (22)$$

同样, 可以给出速度、密度估计的平均绝对百分比误差和平方根误差. 平均绝对百分比误差越小, 说明模型对变量估计精度越高.

### 3.3 结果分析

为了比较单一模型和联合模型参数优化方法对交通流宏观模型参数估计的影响, 分别应用实测数据对 Castillo-Benítez 和 Van Aerde 模型进行参数估计. 所用数据由北京市交通管理局提供, 其为北京

市西二环路官员桥附近主路微波检测数据. 数据采集时间为 2017 年 11 月 13—15 日, 数据采集间隔为 2 min. 应用 SAS 软件<sup>[29]</sup>中的非线性回归分析模块中的 Levenberg-Marquart 方法对模型参数进行了估计, 为了说明联合模型估计效果, 同时也给出了单一模型参数估计结果. 表 1、2 分别是 2 个模型采用单一模型、联合模型参数优化方法给出的模型参数估计结果.

表 1 Castillo-Benítez 模型参数估计结果比较

Table 1 Comparison of parameter estimates for Castillo-Benítez model

参数	参数估计	
	优化目标式(8)	优化目标式(15a)
$v_f / (\text{km} \cdot \text{h}^{-1})$	76.0	71.0
$w_j / (\text{km} \cdot \text{h}^{-1})$	-24.0	-26.0
$k_j / (\text{辆} \cdot \text{km}^{-1})$	160	160
$R_v^2$	0.904	0.885
$R_q^2$	0.929	0.939
$R_w^2$	0.913	0.910
MAPE <sub>v</sub> /%	19.8	10.0
MAPE <sub>q</sub> /%	18.7	10.0
RMSE <sub>v</sub> /( $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ )	6.7	7.3
RSME <sub>q</sub> /( $\text{辆} \cdot \text{h}^{-1}$ )	181.0	167.3

1) 对于 Castillo-Benítez 模型, 单一模型(仅考虑  $k-v$  关系模型)的判定系数  $R_v^2 = 0.904$  高于联合模型(同时考虑  $k-v$ 、 $k-q$  关系模型)计算的  $R_v^2$  (0.885); 由  $k-v$  模型推导得到的  $k-q$  模型的拟合优度为  $R_q^2 = 0.929$ , 小于联合模型计算的  $R_q^2 = 0.939$ ; 而单一模型总体拟合优度  $R_w^2$  (0.913) 与联合模型总体拟合优度  $R_w^2$  (0.910) 无显著差异.

2) 对于 Castillo-Benítez 模型而言, 单一模型优化结果对应的速度估计与流量估计 MAPE 分别为 19.8% 和 18.7%, 速度和流量估计的 RMSE 分别为 6.7 km/h 和 181.0 辆/h; 相应的联合模型优化计算的速度和流量估计 MAPE 为 10.0% 和 10.0%, 速度和流量估计的 RMSE 分别为 7.3 km/h 和 167.3 辆/h. 因此, 对于 Castillo-Benítez 模型而言, 联合估计在一定程度上牺牲了原来单一模型给出的速度估计精度, 但提高了流量估计精度, 速度的 RMSE 从 6.7 km/h 提高为 7.3 km/h, 流量 RMSE 从 181.0 辆/h 减少到 167.3 辆/h.

表 2 Van Aerde 模型参数估计结果比较

Table 2 Comparison of parameter estimates for Van Aerde model

参数	参数估计	
	优化目标式(10)	优化目标式(16a)
$v_f / (\text{km} \cdot \text{h}^{-1})$	80.0	75.0
$k_j / (\text{辆} \cdot \text{km}^{-1})$	160.0	159.7
$q_c / (\text{辆} \cdot \text{h}^{-1})$	1 870	1 800
$v_c / (\text{km} \cdot \text{h}^{-1})$	36.0	40.0
$R_k^2$	0.917	0.905
$R_q^2$	0.667	0.694
$R_w^2$	0.732	0.749
MAPE <sub>k</sub> /%	16.4	14.2
MAPE <sub>q</sub> /%	16.3	14.2
RMSE <sub>k</sub> /( $\text{辆} \cdot \text{km}^{-1}$ )	9.0	9.7
RSME <sub>q</sub> /( $\text{辆} \cdot \text{h}^{-1}$ )	684.0	378.5

3) 图 1 给出了基于标定的 Castillo-Benítez 模型估计的交通流参数与实测数值散点图. 其中, 图 1(a) 和图 1(b) 是基于单一优化模型估计得到的速度和流量估计值与实测数值散点图, 可以发现估计值与实测值拟合程度并不理想; 图 1(c) 和图 1(d) 分别是应用联合模型计算的速度和流量估计值与实测数值散点图; 图 1(e) 和图 1(f) 分别是应用单一模型与联合模型计算的密度-速度、密度-流量估计值与实测数值对比散点图. 由图 1 可以发现, 相对于单一优化模型估计而言, 联合模型优化方法得到的估计值与实测值拟合程度改善明显, 特别是对于高密度交通状态下, 联合估计结果与实测数据更接近.

4) 对于 Van Aerde 模型, 基于单一优化模型(仅考虑  $v-k$  关系模型)优化得到的  $R_k^2 = 0.917$  高于联合优化模型(同时考虑  $v-k$ 、 $v-q$  关系模型)计算的  $R_k^2 = 0.905$ ; 由  $v-k$  模型换算得到的  $v-q$  计算的  $R_q^2 = 0.667$  小于联合模型计算的  $R_q^2 = 0.694$ ; 单一优化模型总体拟合优度  $R_w^2$  (0.732) 小于联合优化模型计算得到的  $R_w^2$  (0.749).

5) 对于 Van Aerde 模型而言, 单一模型优化法计算的密度和流量 MAPE 分别为 16.4% 和 16.3%, 密度和流量估计的 RMSE 分别为 9.0 辆/h 和 684.0 辆/h; 联合模型优化法计算 MAPE 值为 14.2% 和 14.2%, 密度和流量估计的 RMSE 数值

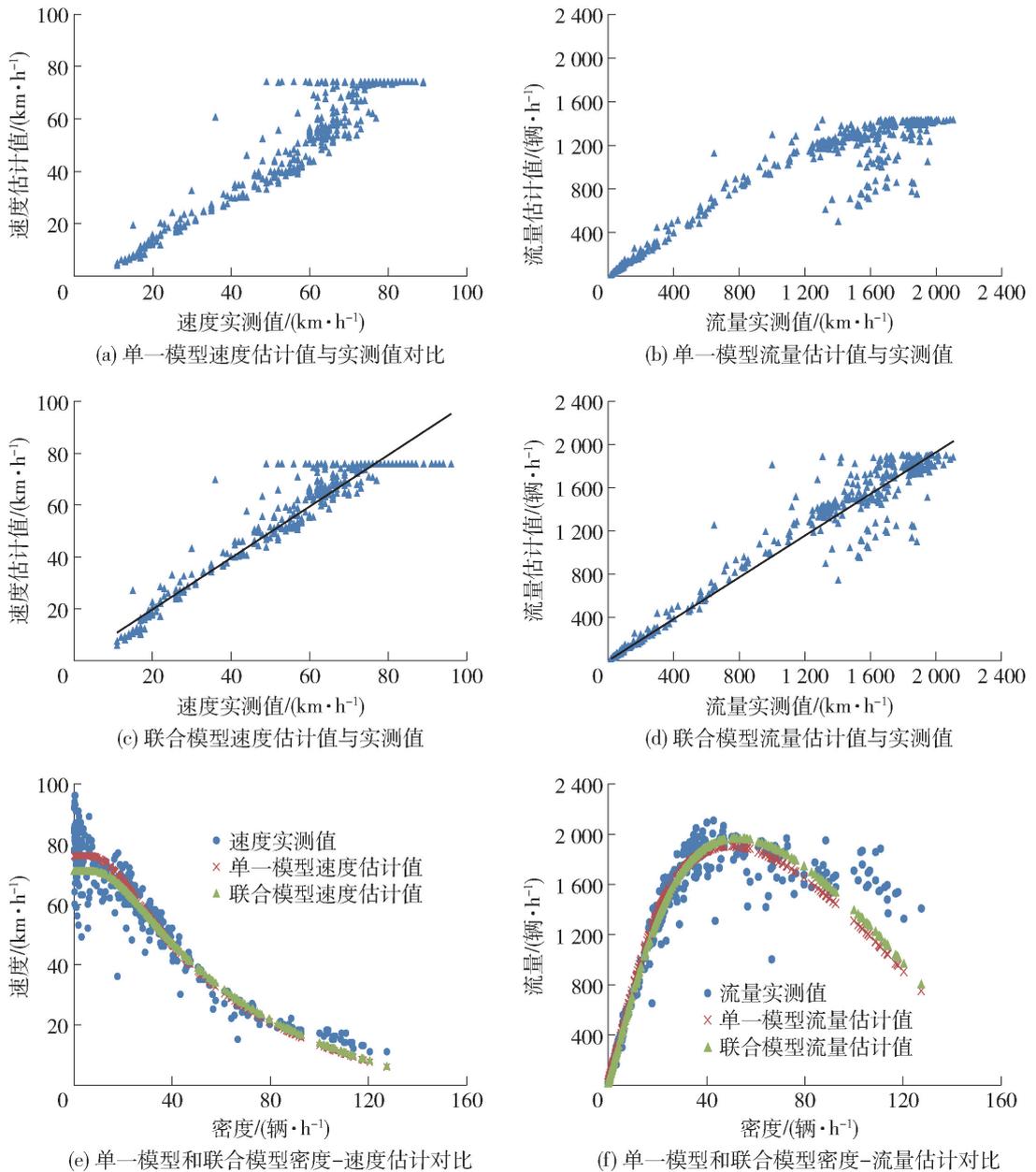


图1 基于 Castillo-Benitez 模型的变量估计值和实测值散点图

Fig. 1 Plots of field data and estimated value from Castillo-Benitez model

分别为 9.7 辆/km 和 387.5 辆/h。因此,对于 Van Aerde 模型而言,联合估计在一定程度上“牺牲”了原来单一模型给出的密度估计精度,密度 RMSE 从 9.0 辆/km 提高为 9.7 辆/km,但提高了流量估计精度,流量 RMSE 从 684.0 辆/h 减少到 387.5 辆/h。

6) 图 2 给出了基于标定的 Van Aerde 模型估计的交通流参数与实测数值散点图。其中,图 2(a)和图 2(b)分别为单一模型优化法估计的密度和流量值与实测值散点图,图 2(c)和图 2(d)分别为联合模型优化法估计的密度和流量值与实

测数值散点图,图 2(e)和图 2(f)分别是应用单一模型与联合模型计算的速度-密度、速度-流量估计值与实测数值对比散点图。由图 2 可知,相对于单一模型而言,联合模型参数估计值与实测值拟合程度稍有改善,但与 Castillo-Benitez 模型估计结果不同的是,对于非拥堵状态下,联合模型估计结果与实测数据更接近。

从以上结果可以发现,对 Castillo-Benitez 模型而言,联合模型参数估计方法显著提高了流量的估计精度;对于 Van Aerde 模型而言,模型精度有所提高,参数估计误差有所改善。

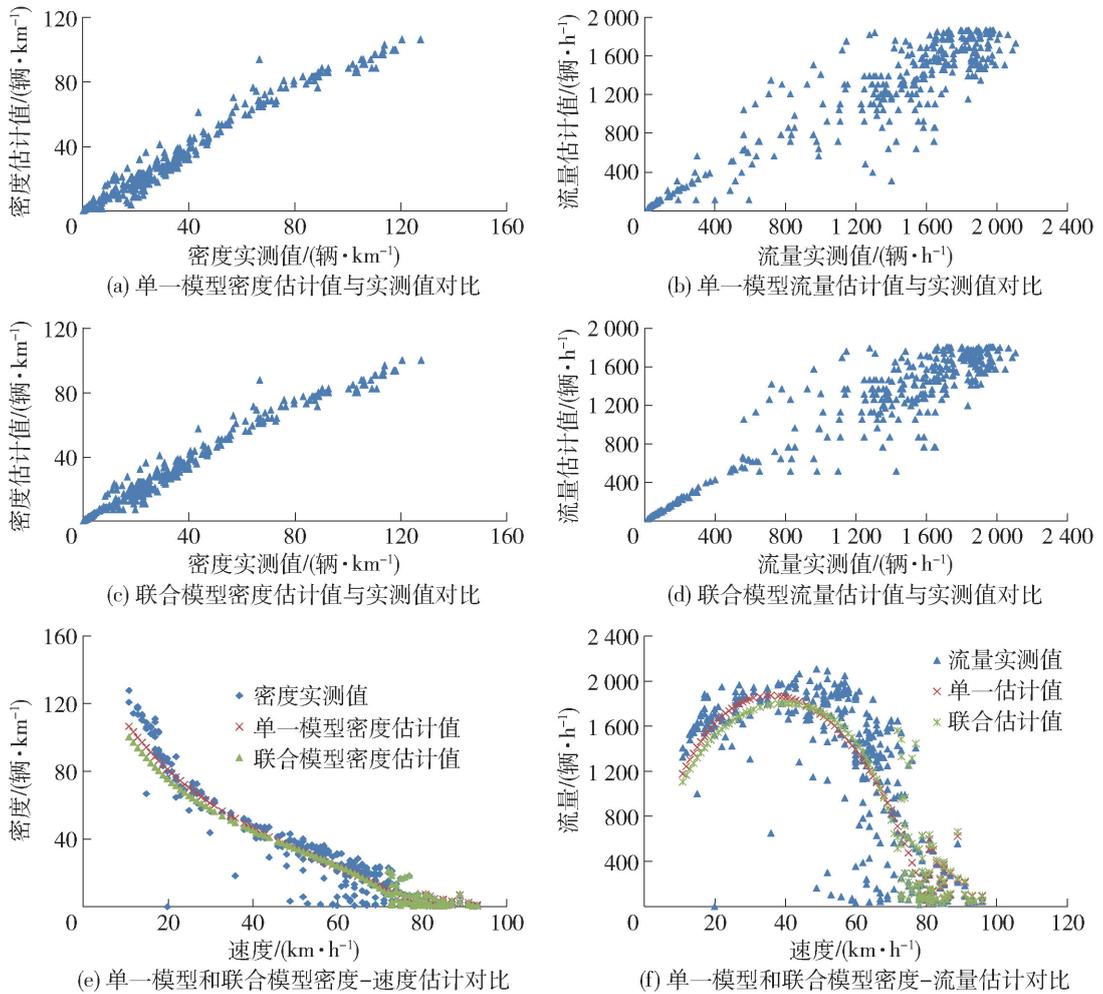


图2 基于 Van Aerde 模型的变量估计值和实测值散点图

Fig. 2 Plots of field data and estimated value from Van Aerde model

## 4 结论

1) 从联合模型估计精度角度,提出了交通流基本模型联合模型参数估计方法。

2) 研究表明,估计联合模型参数估计方法在一定程度上“牺牲”单一变量估计精度的基础上,但提高了模型整体的估计精度。

3) 从实测数据验证结果来看,模型估计精度的提高与模型选择有关,这也说明了模型选择和参数估计方法影响了模型对实测数据拟合精度。

4) 联合模型估计效果评价指标还需要进一步研究。本研究只讨论了给定的交通流模型以及目标函数形式下模型估计效果,没有讨论其他交通流模型以及目标函数,以后的研究中可进一步考虑优化目标、参数估计方法对交通流模型参数估计精度的影响。

## 参考文献:

- [1] 邵长桥, 郑加菊, 张可. 基于运行效率的通行能力计算方法[J]. 北京工业大学学报, 2016, 42(1): 107-111. SHAO C Q, ZHENG J J, ZHANG K. Freeway capacity estimation method based on traffic operational efficiency [J]. Journal of Beijing University of Technology, 2016, 42(1): 107-111. (in Chinese)
- [2] GREENSHIELDS B. A study of traffic capacity [C] // Proceedings of the Annual Meeting of the Highway Research Board. Washing D. C.: Highway Research Board, 1935: 448-477.
- [3] GREENBERG H. An analysis of traffic flow [J]. Operations Research, 1959, 7(1): 79-85.
- [4] MICHAEL Z F L. A generic characterization of equilibrium speed-flow curves [J]. Transportation Science, 2008, 42 (2): 220-235.
- [5] DRAKE J S, SCHAFER J L, MAY A D. A statistical analysis of speed density hypotheses [J]. Highway Research Recorder, 1967, 154: 53-87.

- [6] DREW D R. Traffic flow theory and control [M]. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [7] CEDER A, MAY A D. Further evaluation of single- and two-regime traffic flow models [J]. Transportation Research Recorder, 1976, 567: 1-15.
- [8] LIANG Z, HE Z B, TIAN H. A flexible traffic stream model and its three representations of traffic flow [J]. Transportation Research Part C, 2017, 75: 136-167.
- [9] CASTILLO J M D, BENITEZ F G. On the functional form of the speed-density relationship I: general theory [J]. Transportation Research (Part B: methodology), 1995, 29(5): 373-389.
- [10] VAN AERDE M, RAKHA H. Single regime speed-flow-density relationship for congested and uncongested highways [C] // Proceedings of the 74th Transportation Research Board Annual Meeting. Washington D. C.: Transportation Research Board, 1995.
- [11] WANG H Z, LI J, CHEN Q Y, et al. Logistic modeling of the equilibrium speed-density relationship [J]. Transportation Research (Part A), 2011, 45: 554-566.
- [12] HARI K G, RAO K R. Speed-density functional relationship for heterogeneous traffic data: a statistical and theoretical investigation [J]. Journal of Modeling Transport, 2019, 27(1): 61-74.
- [13] EDIE L C. Car following and steady state theory for non-congested traffic [J]. Operations Research, 1961, 9: 66-76.
- [14] 马晓龙, 马东方, 王殿海, 等. 基于 Logistic 曲线的交通流速度-密度关系建模 [J]. 中国公路学报, 2015, 28(4): 94-100.  
MA X L, MA D F, WANG D H, et al. Modeling of speed-density relationship in traffic flow based on logistic curve [J]. China Journal of Highway and Transport, 2015, 28(4): 94-100. (in Chinese)
- [15] QU X B, WANG S A, ZHANG J. On the fundamental diagram for freeway traffic: a novel calibration approach for single-regime models [J]. Transportation Research (Part B), 2015, 73: 91-102.
- [16] 张辉, 江竹, 李树彬, 等. 城市快速路交通流参数估计方法研究 [J]. 控制工程, 2020, 27(3): 507-512.  
ZHANG H, JIANG Z, LI S B, et al. Research on estimation method of traffic flow parameters for urban expressway [J]. Control Engineering of China, 2020, 27(3): 507-512. (in Chinese)
- [17] 林豪, 江竹, 李树彬. 基于机器学习的城市快速路速度-密度关系模型 [J]. 西安科技大学学报, 2020, 40(6): 1109-1116.  
LIN H, JIANG Z, LI S B. Speed-density relationship model of urban expressway based on machine learning [J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2020, 40(6): 1109-1116. (in Chinese)
- [18] RAKHA H, ARAFEH M. Calibrating steady-state traffic stream and car-following models using loop detector data [J]. Transportation Science, 2010, 44(2): 151-168.
- [19] SHAO C Q, LIU X M, ZHANG Z Y, et al. Calibrating car-following model considering measurement errors [J]. Advances in Mechanical Engineering Volume, 2013, Article ID 890741.
- [20] ZHANG J, QU X B, WANG S A. Reproducible generation of experimental data sample for calibrating traffic flow fundamental diagram [J]. Transportation Research Part A, 2018, 111: 41-52.
- [21] ZHANG C B, HUANG Z G, WANG Y G. A traffic fundamental diagram calibrating methodology to avoid unbalanced speed-density observation [J]. Transport, 2021, 36(1): 13-24.
- [22] NEILA B, MAURICE A, HABIB H S. A data-driven approach for estimating the fundamental diagram [J]. Promet-Traffic Transportation, 2019, 31(2): 17-128.
- [23] DUNCAM N C. A further look at speed/flow/concentration [J]. Traffic Engineering and Control, 1979, 20(10): 482-483.
- [24] CASTILLO J M D. Three new models for the flow-density relationship: derivation and testing for freeway and urban data [J]. Transportmetrica, 2012, 8(6): 443-465.
- [25] LIDTHILL M J, WHITHAM G B. On kinematic waves: II. a theory of traffic flow on long crowded roads [J]. Proceedings of the Royal Society, 1995, A(229): 317-345.
- [26] RICHARDS P I. Shock waves on the highway [J]. Operations Research, 1956, 4: 42-51.
- [27] RAKHA H, CROWTHER B. A comparison of the Greenshields, pipes, and Van Aerde car-following and traffic stream models [J]. Transportation Research Record, 2002, 1802: 248-262.
- [28] HARI K G, RAMACHANDRA R. Speed-density functional relationship for heterogeneous traffic data: a statistical and theoretical investigation [J]. Journal of Modeling Transportation, 2019, 27(1): 61-74.
- [29] 肯迪, 史密斯. SAS 应用统计分析 [M]. 5 版. 北京: 人民邮电出版社, 2011. (责任编辑 杨开英)