

一类 S 分布时滞 Hopfield 神经网络的全局吸引性

董 健, 李云章

(北京工业大学理学部, 北京 100124)

摘要: 研究了一类具有 S 分布时滞的 Hopfield 神经网络的全局吸引性问题. 首先, 通过常微分方程比较原理和适当的迭代证明了系统解的有界性, 再通过一类非线性代数方程组和迭代技巧得到了平衡点全局吸引的一个充分条件. 最后, 通过数值模拟验证了结论的有效性.

关键词: Hopfield 神经网络; S 分布时滞; 全局吸引; 平衡点; 渐近稳定; 有界性

中图分类号: O 175

文献标志码: A

文章编号: 0254-0037(2022)02-0176-06

doi: 10.11936/bjtxb2020100013

Sufficient Condition for Global Attractivity of a Class of Hopfield Neural Networks With S-distributed Delays

DONG Jian, LI Yunzhang

(Faculty of Science, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: Global attractivity of a class of Hopfield neural networks with S-distributed delays was studied in this paper. Based on a class of nonlinear algebraic equations and some computational techniques in M-matrix, a sufficient condition for global attractivity of the equilibrium of a class of Hopfield neural networks with S-distributed delays was obtained. Numerical simulations were given to illustrate validity of the result.

Key words: hopfield neural network; S-distributed delays; global attractivity; equilibrium; asymptotic stability; boundedness

近年来, Hopfield 神经网络^[1-3]的理论成果在联想记忆和最优化计算等方面有了广泛的应用, 因此对于 Hopfield 神经网络的研究越来越多地引起了人们的关注^[4-7]. 在 Hopfield 神经网络的常微分方程模型被提出之后, 学者们就将有限时滞和无穷时滞引入到模型中, 以求更精确地模拟现实世界的现象. 而时滞的出现会很大程度地影响神经网络的动力学性质, 使网络的性质变得更加复杂.

在文献[3]中, 一类具有有限时滞的 Hopfield 神经网络

$$C_i \dot{u}_i(t) = -\frac{1}{R_i} u_i(t) + \sum_{j=1}^N T_{ij} f_j(u_j(t-\tau_j)) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

被提出, 并对系统(1)的线性化系统进行了稳定性分析. 此外, 亦有许多学者对上述系统的动力学性质进行了研究, 给出了在不同条件下系统(1)的平衡点全局渐近稳定的判据^[4,8]. 而相比具有有限时滞的系统, 含有无穷时滞的系统在一定程度上更能准确地描述神经元之间实际的相互作用. 因此, 无穷时滞被引入到 Hopfield 神经网络中.

收稿日期: 2020-10-23; 修回日期: 2021-01-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11971043)

作者简介: 董 健(1990—), 男, 博士研究生, 主要从事小波分析及动力系统方面的研究, E-mail: dongjian01@emails.bjut.edu.cn

Gopalsamy 等^[4]研究了具有无穷时滞的 Hopfield 神经网络系统

$$\begin{aligned} \dot{U}_i(t) &= -b_i U_i(t) + \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij} f_j \left(\mu_j \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) U_j(s) ds \right) + F_i(t) \end{aligned} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2)$$

并给出了解存在和解趋向于平衡点的判据. 在文献 [9-10] 中, 对于满足不同条件的激励函数, 通过 Lyapunov 泛函方法给出了系统 (2) 的平衡点与滞量无关的全局渐近稳定的充分条件. 而对于其他具有无穷时滞的神经网络的动力学性质亦有诸多学者进行了深入的研究. Liao 等^[11]通过构造合适的 Lyapunov 泛函给出了具有有限和无穷时滞的 Cohen-Grossberg 神经网络系统的平衡点全局吸引的判据. Zhao 等^[12]利用 Lyapunov 方法和线性矩阵不等式技术给出了一类双向联想记忆神经网络正不变集和全局指数吸引集存在的一些代数准则, 并对全局指数吸引域作出了估计. 赵洪涌等^[13]给出了一类具有分布时滞的双向联想记忆神经网络的平衡态一致稳定和全局渐近稳定的充分条件. 钟守铭等^[14]对细胞神经网络进行了研究, 给出了平衡点全局渐近稳定的几个判据. 此外, 廖晓峰等^[15-16]对 2 类带连续分布时滞的神经网络在具有强核和弱核的情况下的渐近稳定性进行了研究. 然而, 对于系统 (2), 亦有学者考虑其具有 S 分布时滞的动力学性质. 邓瑾等^[17]、马亚锋等^[18]给出了系统 (2) 具有 S 分布时滞的不变集、吸引集和全局渐近稳定性的判据. 而谌红美等^[19]则利用 Banach 不动点定理, 通过构造 Lyapunov 泛函, 结合 Hardy 不等式和推广的 Halanay 时滞微分不等式, 给出了一类具有 S 分布时滞的细胞神经网络全局指数稳定的充分条件. 再有, 卢文联等^[20]研究了一类具有 S 分布的递归神经网络 (亦称 Grossberg-Hopfield 神经网络) 殆周期解的存在唯一性和全局稳定性. 此外, 还有许多学者对具有 S 分布时滞的神经网络进行了大量的研究^[21-27]. 然而在以上的研究中更多地是通过构造合适的 Lyapunov 函数或泛函的方法来得到系统的稳定性质, 但是事实上构造 Lyapunov 函数或泛函并不是一件容易的事. 本文考虑具有 S 分布时滞的 Hopfield 神经网络系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -a_i x_i(t) + \\ &\sum_{j=1}^n b_{ij} \int_{-\infty}^0 [dK_{ij}(s)] f_j(x_j(t+s)) \end{aligned} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3)$$

式中: $t \geq 0$; a_i, b_{ij} 是实值常数; $K_{ij}(s)$ 是 $(-\infty, 0]$ 上的单调不减的有界变差函数; 函数 $f_j(u)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是连续可微的.

系统 (3) 的初始条件为

$$\begin{aligned} x_i(s) &= \varphi_i(s) \quad (-\infty < s \leq 0) \\ &\quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (3)$$

式中初始函数 $\varphi_i(s)$ ($i=1,2,\dots,n$) 在 $(-\infty, 0]$ 上是连续的, 并且存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\alpha\theta} |dK_{ij}(\theta)| < \infty$$

受文献 [5-7] 的启发, 本文利用常微分方程比较原理和一种迭代技巧证明了系统解的有界性, 并基于 M-矩阵理论和一类非线性代数方程组给出了系统 (3) 的平衡点全局吸引的一个充分条件.

1 主要结论及证明

对系统 (3) 做一些假设. 假设系统 (3) 满足下列条件:

条件 1 $a_i > 0$ ($i=1,2,\dots,n$).

条件 2 $f_i(0) = 0, |f_i(u)| \leq Q_i$ ($u \in \mathbb{R}, Q_i$ 为正常数, $i=1,2,\dots,n$).

条件 3 $f'_i(u) > 0$ ($u \in \mathbb{R}$), 且 $0 < \bar{f}_i(u) < u$ ($u > 0$), 其中

$$\begin{aligned} \bar{f}_i(u) &= \max\{f_i(u), -f_i(-u)\} \\ &\quad (u > 0, i=1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

条件 4 $\int_{-\infty}^0 dK_{ij}(s) = 1$ ($i, j=1,2,\dots,n$).

引理 1 如果条件 1~4 成立, 那么系统 (3) 的任意解 $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_i(t)| \leq M_i$$

($i=1,2,\dots,n$), 其中非负常数 M_i ($i=1,2,\dots,n$) 满足非线性代数方程组

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \bar{f}_j(M_j) \\ &\quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

证明: 由条件 2 和 4 以及系统 (3) 可得

$$\begin{aligned} D^+ |x_i(t)| &= \text{sgn}\{x_i(t)\} \dot{x}_i(t) = \\ &= \text{sgn}\{x_i(t)\} (-a_i x_i(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n b_{ij} \int_{-\infty}^0 [dK_{ij}(s)] f_j(x_j(t+s)) \leq \\ &-a_i |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \int_{-\infty}^0 [dK_{ij}(s)] |f_j(x_j(t+s))| \leq \\ &-a_i |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \int_{-\infty}^0 [dK_{ij}(s)] Q_j \leq \end{aligned}$$

$$-a_i |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| Q_j$$

($i=1,2,\dots,n$). 由此根据常微分方程比较原理得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x_i(t)| \leq \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| Q_j = M_i^{(0)}$$

($i=1,2,\dots,n$). 因此对于任意充分小的正常数 $\eta > 0$, 存在一个充分大的 $T_0 = T_0(\eta) > 0$ 使得当 $t > T_0$ 时, 有

$$|x_i(t)| \leq M_i^{(0)} + \eta$$

($i=1,2,\dots,n$). 因此, 由条件3和系统(3)可得

$$D^+ |x_i(t)| \leq -a_i |x_i(t)| +$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \int_{-\infty}^0 [dK_{ij}(s)] |f_j(x_j(t+s))| \leq \\ & -a_i |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \left(\int_{-\infty}^{T_0-t} [dK_{ij}(s)] \cdot \right. \\ & \left. |f_j(x_j(t+s))| + \int_{T_0-t}^0 [dK_{ij}(s)] |f_j(x_j(t+s))| \right) \leq \\ & -a_i |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \left(\int_{-\infty}^{T_0-t} [dK_{ij}(s)] Q_j + \right. \\ & \left. \int_{T_0-t}^0 [dK_{ij}(s)] \bar{f}_j(M_j^{(0)} + \eta) \right) < -a_i |x_i(t)| + \\ & \sum_{j=1}^n |b_{ij}| (r_{ij}(t) + \bar{f}_j(M_j^{(0)} + \eta)) \end{aligned}$$

($i=1,2,\dots,n$), 其中

$$r_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{T_0-t} [dK_{ij}(s)] Q_j$$

($i,j=1,2,\dots,n$). 根据条件4容易知道

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{T_0-t} [dK_{ij}(s)] Q_j = 0$$

($i,j=1,2,\dots,n$). 根据常微分方程比较原理得到

$$|x_i(t)| \leq e^{-a_i(t-T_0)} |x_i(T_0)| +$$

$$e^{-a_i t} \int_{T_0}^t e^{a_i s} \left[\sum_{j=1}^n |b_{ij}| (r_{ij}(s) + \bar{f}_j(M_j^{(0)} + \eta)) \right] ds$$

($t > T_0, i=1,2,\dots,n$). 对不等号右端的积分项应用洛必达法得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-a_i t} \int_{T_0}^t e^{a_i s} \left[\sum_{j=1}^n |b_{ij}| (r_{ij}(s) + \bar{f}_j(M_j^{(0)} + \eta)) \right] ds =$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_i} e^{a_i t} \left[\sum_{j=1}^n |b_{ij}| (r_{ij}(t) + \bar{f}_j(M_j^{(0)} + \eta)) \right] = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \bar{f}_j(M_j^{(0)} + \eta)$$

($i=1,2,\dots,n$). 由此不等式成立

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_i(t)| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-a_i(t-T_0)} |x_i(T_0)| +$$

$$e^{-a_i t} \int_{T_0}^t e^{a_i s} \left(\sum_{j=1}^n |b_{ij}| (r_{ij}(s) + \bar{f}_j(M_j^{(0)} + \eta)) \right) ds) = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \bar{f}_j(M_j^{(0)} + \eta)$$

($i=1,2,\dots,n$). 令 $\eta \rightarrow 0$, 得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x_i(t)| \leq \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \bar{f}_j(M_j^{(0)}) = M_i^{(1)} \leq M_i^{(0)}$$

($i=1,2,\dots,n$). 重复以上过程, 得到一个满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x_i(t)| \leq \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \bar{f}_j(M_j^{(k)}) = M_i^{(k+1)} \leq M_i^{(k)} \quad (4)$$

($i=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots$) 的非负的单调不增的收敛序列 $\{M_i^{(k)}\}$ ($i=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots$). 令

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_i^{(k)} = M_i$$

($i=1,2,\dots,n$), 那么对式(4)令 $k \rightarrow \infty$, 就得到

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_i(t)| \leq M_i$$

($i=1,2,\dots,n$), 并且

$$M_i = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \bar{f}_j(M_j)$$

($i=1,2,\dots,n$). 引理1证毕.

引理2^[28] 令

$$Z^{n \times n} = \{ (f_{ij})_{n \times n} | f_{ij} \leq 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n \}$$

并且 $F = (f_{ij})_{n \times n} \in Z^{n \times n}$, 则下面2个命题等价:

1) F 的所有主子式非负.

2) 如果 $x \neq 0$ 并且 $y = Fx$, 那么存在下脚标 i 使得 $x_i \neq 0$, 并且 $x_i y_i \geq 0$.

定理1 如果条件1~4成立, 且矩阵 \hat{B} 满足引理2中的条件1)或2), 那么系统(3)的平衡点 $(0, 0, \dots, 0)^T$ 是全局吸引的. 其中 $\hat{B} = (\hat{b}_{ij})_{n \times n}$, $\hat{b}_{ii} = a_i - |b_{ii}|$, $\hat{b}_{ij} = -|b_{ij}| (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n)$.

证明: 假设 $M_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 并且满足非线性代数方程组

$$M_i = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \bar{f}_j(M_j) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

先来证明 $M_i (i=1, 2, \dots, n)$ 不可能同时大于零. 假设 $M_i (i=1, 2, \dots, n)$ 同时大于零, 那么由条件3和式(5)得到

$$M_i a_i < \sum_{j=1}^n |b_{ij}| M_j$$

($i=1, 2, \dots, n$). 可以写成矩阵形式

$$-\hat{B}M < 0 \quad (6)$$

式中 $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)^T > 0$. 令 $x = M > 0$ 且 $y = -\hat{B}M$. 那么根据引理2, 存在下脚标 i 使得

$$M_i y_i = M_i \left(- \sum_{j=1}^n \hat{b}_{ij} M_j \right) \geq 0$$

这便和式(6)矛盾. 因此 $M_i (i=1,2,\dots,n)$ 不可能同时大于零.

不失一般性,假设 $M_n = 0$, 那么带有 n 个未知量 $M_i (i=1,2,\dots,n)$ 的非线性代数方程组(5)就退化为带有 $n-1$ 个未知量 $M_i (i=1,2,\dots,n-1)$ 的非线性代数方程组

$$M_i = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{n-1} |b_{ij}| \bar{f}_j(M_j)$$

($i=1,2,\dots,n-1$). 再重复上面的讨论,一定存在某个 $k (1 \leq k \leq n-1)$ 使得 $M_k = 0$. 不失一般性,可以假设 $M_{n-1} = 0$. 再次重复上面的过程,就得到 $M_2 = M_3 = \dots = M_{n-1} = 0$, 并且有

$$M_1 = \frac{1}{a_1} |b_{11}| \bar{f}_1(M_1)$$

如果 $b_{11} = 0$, 那么显然 $M_1 = 0$. 如果 $b_{11} \neq 0$ 并且 $M_1 > 0$, 那么由条件3得到

$$(a_1 - |b_{11}|) M_1 < 0$$

这便和 $a_1 - |b_{11}| \geq 0$ 矛盾. 因此

$$M_1 = M_2 = \dots = M_n = 0$$

再由引理1,得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0$$

($i=1,2,\dots,n$). 这就说明系统(3)的平衡点 $(0,0,\dots,0)^T$ 是全局吸引的.

2 数值模拟与结论

考虑一维系统

$$\dot{x}(t) = -x(t) + b \int_{-\infty}^0 [de^s] \tanh(x(t+s)) \quad (7)$$

式中 b 是常数.

首先,讨论系统(7)的平衡点. 将 $x(t) = c$ (c 为常数) 带入系统(7)得

$$c = b \tanh c$$

根据双曲正切函数的性质,得到

1) 若 $b \leq 1$, 则系统(7)只有一个零平衡点.

2) 若 $b > 1$, 则系统(7)有3个平衡点, 1个正平衡点, 1个零平衡点, 1个负平衡点.

其次,分析系统(7)的渐近稳定性. 当 $b = 0$ 时, 系统(7)退化为常微分方程, 根据常微分方程理论知(7)的平衡点是渐近稳定的. 当 $b \neq 0$ 时, 系统(7)的线性化系统的特征方程为

$$\lambda + 1 - b \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda+1)s} ds = 0 \quad (8)$$

将 $\lambda = \alpha + i\beta$ 代入到式(8)并将实虚部分离得

$$\begin{aligned} & \alpha + 1 - b \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha+1)s} \cos(\beta s) ds + \\ & i \left(\beta - b \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha+1)s} \sin(\beta s) ds \right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

由式(9), 得到特征方程(8)的根的情况:

- 1) 当 $\alpha + 1 \leq 0$ 时, 特征方程(8)无根.
- 2) 当 $\alpha + 1 > 0$ 且 $\beta \neq 0$ 时, 特征方程(8)无根.
- 3) 当 $\alpha + 1 > 0$ 且 $\beta = 0$ 且 $b < 0$ 时, 特征方程(8)无根.
- 4) 当 $\alpha + 1 > 0$ 且 $\beta = 0$ 且 $b > 0$ 时, 特征方程(8)有一个单根 $\lambda = -1 + \sqrt{b}$.

根据以上分析, 当特征方程(8)的根只具有负实部时, 即 $0 < b < 1$ 时, 系统(7)的零解是渐近稳定的^[29]. 综上所述, 当 $0 \leq b < 1$ 时, 系统(7)的零解是渐近稳定的.

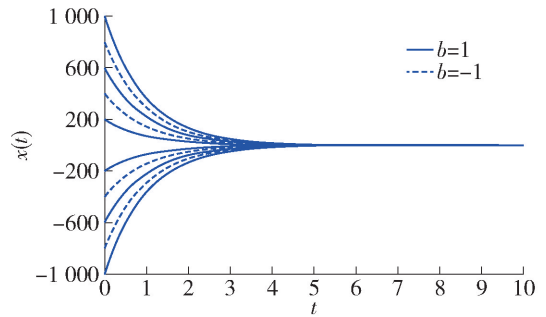


图1 当 $b=1, b=-1$ 时, 系统(7)对于不同初始函数的解

Fig. 1 Solution of system (7) corresponding to different initial functions when $b=1$ or $b=-1$

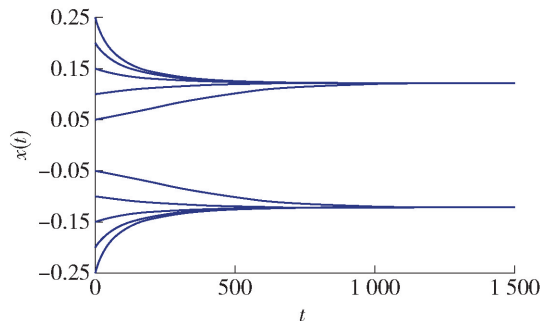


图2 当 $b=1.01$ 时, 系统(7)对于不同初始函数的解
Fig. 2 Solution of system (7) corresponding to different initial functions when $b=1.01$

最后,通过数值模拟的结果来说明定理1的有效性. 容易看出系统(7)满足条件1~4, 且 $\hat{B} = (1 - |b|)$. 而矩阵 \hat{B} 满足引理2中的条件1)或2)当且仅当 $|b| \leq 1$. 因此由定理1知, 如果 $|b| \leq 1$, 那么系统(7)的平衡点是全局吸引的. 事实上, 图1

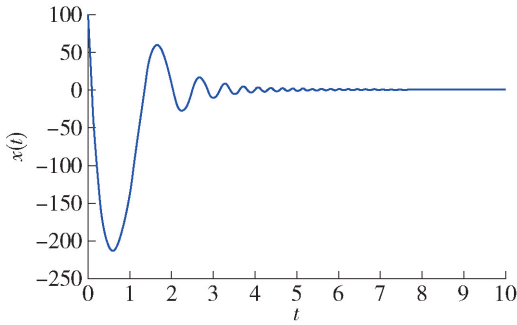


图3 当 $b = -1\ 000$ 且初始函数 $\varphi = 100$ 时, 系统(7)的解

Fig. 3 Solution of system (7) when $b = -1\ 000$ and initial function $\varphi = 100$

表明, 当满足 $|b| \leq 1$ 的条件时, 系统(7)唯一的平衡点是全局吸引的, 这说明了定理 1 是有效的. 图 2 说明, 当 $b > 1$ 时, 系统(7)的解趋向于 2 个非零的位置, 而不再收敛到零平衡点. 实际上, 当 $b > 1$ 时, 系统(7)不再只有唯一的零平衡点, 而是衍生出另外的一正一负 2 个非零平衡点, 图 2 中的解曲线实际上分别趋向于 2 个非零平衡点. 而图 3 表明, 当 b 取得很小时, 系统(7)唯一的平衡点也是全局吸引的. 本文并未从理论上证明当 $b < -1$ 时, 系统(7)唯一的平衡点是全局吸引的, 但大量的数值模拟显示当 b 取得更小时, 系统(7)在不同初始函数条件下的解曲线仍旧趋向于唯一的平衡点.

参考文献:

- [1] HOPFIELD J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities [J]. Proc Nat Acad Sci U S A, 1982, 79(8): 2554-2558.
- [2] HOPFIELD J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons [J]. Proc Nat Acad Sci U S A, 1984, 81(10): 3088-3092.
- [3] MARCUS C M, WESTERVELT R M. Stability of analog neural networks with delay [J]. Phys Rev A (3), 1989, 39(1): 347-359.
- [4] GOPALSAMY K, HE X. Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays [J]. Phys D, 1994, 76(4): 344-358.
- [5] MA W B, HARA T, TAKEUCHI Y. Stability of a 2-dimensional neural network with time delays [J]. J Biol Systems, 2000, 8(2): 177-193.
- [6] ZHANG S, MA W B, KUANG Y. Necessary and sufficient conditions for global attractivity of Hopfield-type neural networks with time delays [J]. Rocky Mountain J

Math, 2008, 38(5): 1829-1840.

- [7] MA W B, SAITO Y, TAKEUCHI Y. M-matrix structure and harmless delays in a Hopfield-type neural network [J]. Appl Math Lett, 2009, 22(7): 1066-1070.
- [8] 王林山, 徐道义. Hopfield 型时滞神经网络的稳定性分析 [J]. 应用数学和力学, 2002, 23(1): 59-64.
WANG L S, XU D Y. Stability analysis of Hopfield neural networks with time delay [J]. Appl Math Mech, 2002, 23(1): 59-64. (in Chinese)
- [9] 周冬明, 曹进德. 一类具有连续分布时滞模型的稳定性 [J]. 生物数学学报, 1998, 13(3): 292-295.
ZHOU D M, CAO J D. Stability of a class of continuously distributed delays model [J]. J Biomath, 1998, 13(3): 292-295. (in Chinese)
- [10] 曹进德. 具有连续分布时滞模型的稳定性分析 [J]. 工程数学学报, 2000, 17(1): 7-11.
CAO J D. Stability analysis of a continuously distributed delay model [J]. J Engrg Math, 2000, 17(1): 7-11. (in Chinese)
- [11] LIAO X F, LI C D. Global attractivity of Cohen-Grossberg model with finite and infinite delays [J]. J Math Anal Appl, 2006, 315(1): 244-262.
- [12] ZHAO Z H, JIAN J G. Positive invariant sets and global exponential attractive sets of BAM neural networks with time-varying and infinite distributed delays [J]. Neurocomputing, 2014, 142(1): 447-457.
- [13] 赵洪涌, 徐道义. 具有分布时滞的双向联想记忆神经网络稳定性分析 [J]. 四川大学学报(自然科学版), 2001, 38(4): 65-67.
ZHAO H Y, XU D Y. Stability analysis of bidirectional associative memory neural networks with distributed delays [J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2001, 38(4): 65-67. (in Chinese)
- [14] 钟守铭, 黄廷祝, 黄元清. 具有无穷时滞的细胞神经网络的稳定性分析 [J]. 电子学报, 2001, 29(5): 1-4.
ZHONG S M, HUANG T Z, HUANG Y Q. The stability analysis of cellular networks with infinite delay [J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(5): 1-4. (in Chinese)
- [15] 廖晓峰, 王炎, 吴中福, 等. 连续分布时延点格神经网络的稳定性 [J]. 计算机研究与发展, 1999, 36(10): 1-11.
LIAO X F, WANG Y, WU Z F, et al. Stability of cellular neural networks with continuously distributed delay [J]. Journal of Computer Research and Development, 1999, 36(10): 1-11. (in Chinese)
- [16] 廖晓峰, 吴中福, 王康, 等. 带分布时延神经网络: 从稳定到振荡再到稳定的动力学现象 [J], 电子与信息

- 学报, 2001, 23(7):687-692.
- LIAO X F, WU Z F, WANG K, et al. A switch form stability to oscillation back to stability for neural network with distributed delay [J]. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2001, 23(7):687-692. (in Chinese)
- [17] 邓瑾, 王林山, 徐道义. 具有S-型分布时滞的Hopfield神经网络模型的渐近行为[J]. *四川大学学报(自然科学版)*, 2004, 41(1): 19-23.
- DENG J, WANG L S, XU D Y. Asymptotic behaviour of Hopfield neural networks with S-type distributed delays [J]. *Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)*, 2004, 41(1): 19-23. (in Chinese)
- [18] 马亚锋, 王林山. S-分布时滞静态神经网络模型的不变集和吸引集[J]. *黑龙江大学学报(自然科学版)*, 2006, 23(4): 506-508.
- MA Y F, WANG L S. Invariant and attracting sets of static neural networks with S-type distributed time delays [J]. *Journal of Heilongjiang University (Natural Science)*, 2006, 23(4): 506-508. (in Chinese)
- [19] 湛红美, 王林山. 具有S分布时滞细胞神经网络的全局指数稳定性[J]. *中国海洋大学学报*, 2012, 42(3): 96-100.
- CHEN H M, WANG L S. Global exponential stability of cellular neural networks with S-distributed delays [J]. *Periodical of Ocean University of China*, 2012, 42(3): 96-100. (in Chinese)
- [20] 卢文联, 陈天平. 时滞神经网络殆周期解的全局稳定性[J]. *中国科学A辑数学*, 2005, 35(7): 774-784.
- LU W L, CHEN T P. Global stability of almost periodic solutions of delayed neural networks [J]. *Science China Mathematics*, 2005, 35(7): 774-784. (in Chinese)
- [21] 孙小淇, 王林山. S-分布时滞的随机Hopfield神经网络的稳定性[J]. *中国海洋大学学报*, 2016, 46(10): 139-142.
- SUN X Q, WANG L S. Stability of stochastic Hopfield neural network with S-type distributed delays [J]. *Periodical of Ocean University of China*, 2016, 46(10): 139-142. (in Chinese)
- [22] 李延波, 王汝凉. S-分布时滞反应扩散Hopfield神经网络稳定性[J]. *哈尔滨理工大学学报*, 2010, 15(2): 63-66.
- LI Y B, WANG R L. Stability of reaction-diffusion Hopfield neural networks with S-type distributed delays [J]. *Journal of Harbin University of Science and Technology*, 2010, 15(2): 63-66. (in Chinese)
- [23] 刘芳, 王林山. S-分布时滞随机高阶Hopfield神经网络的均方指数稳定性[J]. *河北师范大学学报(自然科学版)*, 2015, 39(4): 287-293.
- LIU F, WANG L S. The mean square exponential stability of stochastic high order Hopfield neural networks with S-type distributed time delays [J]. *Journal of Hebei Normal University (Natural Science Edition)*, 2015, 39(4): 287-293. (in Chinese)
- [24] 刘博瑞, 王林山. S分布时滞静态递归神经网络周期解的存在与全局指数稳定性[J]. *中国海洋大学学报*, 2010, 40(7): 159-162.
- LIU B R, WANG L S. Existence and global exponential stability of periodic solution for static recurrent neural networks with S-type distributed delays [J]. *Periodical of Ocean University of China*, 2010, 40(7): 159-162. (in Chinese)
- [25] 郝远霞, 王林山. 多重S-分布时滞二阶Hopfield神经网络的全局指数稳定性[J]. *滨州学院学报*, 2012, 28(3): 18-25.
- XI Y X, WANG L S. Global exponential stability of second-order Hopfield neural networks with multiple S-type distributed time delays [J]. *Journal of Binzhou University*, 2012, 28(3): 18-25. (in Chinese)
- [26] 马成荣. 高阶S-分布时滞细胞神经网络的全局鲁棒指数稳定性[J]. *华东师范大学学报(自然科学版)*, 2011(5): 12-20.
- MA C R. Global robust exponential stability of high-order cellular neural networks with S-type distributed delays [J]. *Journal of East China Normal University (Natural Science)*, 2011(5): 12-20. (in Chinese)
- [27] 马成荣, 周凤燕, 高华. 具有S-分布时滞BAM神经网络的全局指数稳定性[J]. *生物数学学报*, 2012, 27(4): 717-729.
- MA C R, ZHOU F Y, GAO H. Global exponential stability of BAM neural networks with S-type distributed delays [J]. *J Biomath*, 2012, 27(4): 717-729. (in Chinese)
- [28] BERMAN A A, PLEMMONS J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences* [C] // *Computer Science and Applied Mathematics*. New York-London: Academic Press, 1979: 1-161.
- [29] KOLMANOVSKII V, MYSHKIS A. *Applied theory of functional differential equations* [C] // *Mathematics and its Applications 85*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1992: 1-198.

(责任编辑 杨开英)