一类带有间断波动率的永久美式看跌期权的定价公式

王　术[1], 袁　芳[1,2]

(1. 北京工业大学理学部, 北京　100124; 2. 中国光大银行, 北京　100054)

摘　要: 为了探索一类带有波动率 σ 的永久美式看跌期权问题,其中 σ 是一个间断函数,使用包括微分方程理论在内的一些分析技巧,克服了波动率 σ 的间断性所带来的困难,建立了一类永久美式看跌期权的定价公式.

关键词: Black-Scholes 方程; 永久美式期权; 间断波动率; 看跌期权; 期权定价公式; 微分方程

中图分类号: O 175.26　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 0254-0037(2021)10-1167-07

doi: 10.11936/bjutxb2020020014

Permanent American Put Option Pricing Formula With Discontinuous Volatility

WANG Shu[1], YUAN Fang[1,2]

(1. Faculty of Science, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;
2. China Everbright Bank, Beijing 100054, China)

Abstract: The aim of this paper was to explore a class of permanent American put option problem where the volatility σ is allowed as a discontinuous function. Through fine calculation, we overcame the difficulties caused by the discontinuous volatility σ and find a permanent American put option pricing formula.

Key words: Black-Scholes equation; permanent American option; discontinuous volatility; put option; option pricing formula; differential equation

本文致力于研究下列永久美式看跌期权的定价模型:求 $\{V(S),\omega\}$ 使得

$$\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}S^2}+rS\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}-rV=0,\ \omega<S<+\infty \tag{1}$$

$$V(\omega)=K-\omega \tag{2}$$

$$V'(\omega)=-1 \tag{3}$$

$$V(+\infty)=0 \tag{4}$$

式中:$V=V(S)$ 为期权;S 为原生资产价格;σ 为波动率;r 为无风险利率.

定解问题(1)~(4),在数学上称为自由边界问题(free boundary problem),其中 $S=\omega$ 称为自由边界. 在金融学中,$S=\omega$ 称为最佳实施边界.

这类期权定价模型,不仅具有重要理论意义,而且还具有明确的金融意义,因而受到人们的普遍关注. 迄今,有关这类模型的研究已经取得了一系列丰富的研究成果,参见文献[1-20].

众所周知,当波动率 σ 是一个正常数时,这类期权定价模型的研究已经相当完善,详见文献[3]. 但是,当波动率 σ 是一个间断函数时,包括期权定价公式在内的一些问题还有待于进一步研究,详见文献[3]之第10章.

本文选取 $\sigma=\sigma(S)$,是原生资产价格 S 的一个

收稿日期: 2020-02-18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11771031,11531010)
作者简介: 王　术(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事应用偏微分方程方面的研究; E-mail:wangshu@bjut.edu.cn
通信作者: 袁　芳(1990—), 女, 博士研究生, 主要从事应用偏微分方程方面的研究, E-mail:yuanfangrose@163.com

函数,具有表达式

$$\sigma=\sigma(S)=\begin{cases}\sigma_-, & 当\ 0\leqslant S<v\ 时\\ \sigma_+, & 当\ v\leqslant S<+\infty\ 时\end{cases} \tag{5}$$

式中:σ_- 与 σ_+ 为给定的正常数,且 $\sigma_-\neq\sigma_+$;v 为一个给定的正常数.

主要结果就是下列定理 1 ~3.

定理 1 假设式(5)成立. 定义

$$a_-=\frac{2r}{\sigma_-^2},\ a_+=\frac{2r}{\sigma_+^2} \tag{6}$$

如果

$$v<\frac{a_+K}{1+a_+} \tag{7}$$

那么自由边界问题(1) ~(4)的解($V(S)$,ω)具有表达式

$$V(S)=a_+^{a_+}\left(\frac{K}{1+a_+}\right)^{a_++1}S^{-a_+} \tag{8}$$

$$\omega=\frac{a_+K}{1+a_+} \tag{9}$$

定理 2 定义一个函数

$$f(x)=x^m-px+q,\ x\in(0,+\infty) \tag{10}$$

式中:

$$p=\frac{(a_-+1)(a_++1)v^{a_-+1}}{(a_+-a_-)K} \tag{11}$$

$$q=\frac{a_-(a_++1)v^{a_-+1}}{a_+-a_-} \tag{12}$$

$$m=a_-+1 \tag{13}$$

这里 a_- 与 a_+ 由式(6)定义. 假定

$$a_+<a_- \tag{14}$$

如果

$$v>\frac{a_+K}{1+a_+} \tag{15}$$

那么自由边界问题(1) ~(4)有一个解($V(S)$,ω),具有如下性质.

1)自由边界 $S=\omega$ 就是代数方程式

$$f(\omega)=0 \tag{16}$$

在区间$(0,v)$内唯一解.

2)期权函数具有表达式

$$V=\begin{cases}V_-(S), & S\in[\omega,v)\\ V_+(S), & S\in[v,+\infty)\end{cases} \tag{17}$$

式中:

$$V_-(S)=\left(\frac{a_-K}{(1+a_-)\omega}-1\right)S+\frac{K\omega^{a_-}S^{-a_-}}{1+a_-} \tag{18}$$

$$V_+(S)=$$

$$\left\{\left(\frac{a_-K}{(1+a_-)\omega}-1\right)v^{a_++1}+\frac{K\omega^{a_-}v^{a_+-a_-}}{1+a_-}\right\}S^{-a_+} \tag{19}$$

进一步地,期权函数 $V(S)$ 在间断点 $S=v$ 处还满足间断条件

$$V_-(v-0)=V_+(v+0) \tag{20}$$

$$V'_-(v-0)=V'_+(v+0) \tag{21}$$

定理 3 假设

$$a_+>a_- \tag{22}$$

如果

$$v>\frac{a_+K}{1+a_+} \tag{23}$$

那么自由边界问题(1) ~(4)有一个解($V(S)$,ω),并且($V(S)$,ω)具有如下性质.

1)自由边界 $S=\omega$ 就是代数方程式

$$f(\omega)=0 \tag{24}$$

在区间$(0,v)$内的唯一解.

2)期权函数具有下列表达式

$$V=\begin{cases}V_-(S), & S\in[\omega,v)\\ V_+(S), & S\in[v,+\infty)\end{cases} \tag{25}$$

式中:

$$V_-(S)=\left(\frac{a_-K}{(1+a_-)\omega}-1\right)S+\frac{K\omega^{a_-}S^{-a_-}}{1+a_-} \tag{26}$$

$$V_+(S)=$$

$$\left\{\left(\frac{a_-K}{(1+a_-)\omega}-1\right)v^{a_++1}+\frac{K\omega^{a_-}v^{a_+-a_-}}{1+a_-}\right\}S^{-a_+} \tag{27}$$

进一步地,期权函数在间断点 $S=v$ 处还满足间断条件

$$V_-(v-0)=V_+(v+0) \tag{28}$$

$$V'_-(v-0)=V'_+(v+0) \tag{29}$$

注 1 当波动率 σ 为间断函数时,我们将在另一篇文章中给出永久美式看涨期权定价公式. 因此,本文对于永久美式看涨期权的定价公式将不做赘述.

定理 1 ~定理 3 的证明将在第 1 ~3 节中给出. 在第 4 节,将进一步阐述本文的应用.

1 定理 1 的证明

该部分将考虑情况Ⅰ:

$$\omega\in[v,+\infty) \tag{30}$$

则对于所有的 $S\in[\omega,+\infty)\subset[v,+\infty)$,都有 $\sigma(S)=\sigma_+$.

在$[v,+\infty)$上寻找定解问题(1) ~(4)的解.

根据常微分方程理论，需要先找到 2 个线性无关的特解.

在式(1)中，选取 $V=S^\alpha$，可得

$$0=\left[\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}S^2}+rS\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}-rV\right]\Bigg|_{V=S^\alpha,\sigma=\sigma_+}=$$

$$\frac{\sigma_+^2}{2}S^2\frac{\mathrm{d}^2(S^\alpha)}{\mathrm{d}S^2}+rS\frac{\mathrm{d}(S^\alpha)}{\mathrm{d}S}-r(S^\alpha)=$$

$$\frac{\sigma_+^2}{2}S^2\alpha(\alpha-1)S^{\alpha-2}+rS\alpha S^{\alpha-1}-rS^\alpha=$$

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_+^2\alpha(\alpha-1)+r\alpha-r\right]S^\alpha$$

对于所有 $S\in[v,+\infty)$成立. 于是，得出

$$\frac{1}{2}\sigma_+^2\alpha(\alpha-1)+r\alpha-r=0$$

该一元二次方程有 2 个实数根

$$\alpha=1,\ \alpha=-a_+ \tag{31}$$

式中：

$$a_+=\frac{2r}{\sigma_+^2} \tag{32}$$

可得一般解

$$V(S)=AS+BS^{-a_+} \tag{33}$$

式中 A、B 为待定的常数.

使用边界条件式(4)得

$$0=V(+\infty)=\lim_{S\to+\infty}V(S)=\lim_{S\to+\infty}[AS+BS^{-a_+}]$$

这意味着

$$A=0 \tag{34}$$

使用自由边界条件(2)得

$$K-\omega=V(\omega)=A\omega+B\omega^{-a_+}$$

该式及式(34)表明

$$B\omega^{-a_+}=K-\omega \tag{35}$$

使用边界条件式(3)得

$$-1=V'(\omega)=\left[\frac{\mathrm{d}V(S)}{\mathrm{d}S}\right]\Bigg|_{S=\omega}=$$

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}[AS+BS^{-a_+}]\right\}\Bigg|_{S=\omega}=$$

$$\{A-a_+BS^{-a_+-1}\}|_{S=\omega}=A-a_+B\omega^{-a_+-1}$$

该式及式(34)表明

$$-a_+B\omega^{-a_+-1}=-1 \tag{36}$$

使用式(36)得

$$\omega=(a_+B)^{\frac{1}{a_++1}}$$

代入式(35)得

$$B[(a_+B)^{\frac{1}{a_++1}}]^{-a_+}=K-(a_+B)^{\frac{1}{a_++1}}$$

于是

$$a_+^{-\frac{a_+}{a_++1}}B^{\frac{1}{a_++1}}=K-a_+^{\frac{1}{a_++1}}B^{\frac{1}{a_++1}}$$

合并同类项得出

$$[a_+^{\frac{1}{a_++1}}+a_+^{-\frac{a_+}{a_++1}}]B^{\frac{1}{a_++1}}=K$$

移项并开方得出

$$B=\left[\frac{K}{a_+^{\frac{1}{a_++1}}+a_+^{-\frac{a_+}{a_++1}}}\right]^{a_++1}$$

化简得出

$$B=a_+^{a_+}\left(\frac{K}{1+a_+}\right)^{a_++1} \tag{37}$$

使用式(36)(37)计算

$$\omega^{a_++1}=a_+B=a_+a_+^{a_+}\left(\frac{K}{1+a_+}\right)^{a_++1}=$$

$$a_+^{a_++1}\left(\frac{K}{1+a_+}\right)^{a_++1}$$

开方得

$$\omega=\left[a_+^{a_++1}\left(\frac{K}{1+a_+}\right)^{a_++1}\right]^{a_++1}$$

化简得

$$\omega=\frac{a_+K}{1+a_+} \tag{38}$$

则自由边界问题(1)~(4)有解(V,ω)：

$$V=a_+^{a_+}\left(\frac{K}{1+a_+}\right)^{a_++1}S^{-a_+} \tag{39}$$

且

$$\omega=\frac{a_+K}{1+a_+} \tag{40}$$

如果满足条件(30)，即

$$v<\omega=\frac{a_+K}{1+a_+} \tag{41}$$

这表明，如果

$$v<\frac{a_+K}{1+a_+} \tag{42}$$

则自由边界问题(1)~(4)有解(V,ω)：

$$V=a_+^{a_+}\left(\frac{K}{1+a_+}\right)^{a_++1}S^{-a_+} \tag{43}$$

$$\omega=\frac{a_+K}{1+a_+} \tag{44}$$

定理 1 得证.

2　定理 2 的证明

该部分考虑下列 2 种情况：

1) $S\in[v,+\infty)$；2) $S\in[\omega,v)$.

1) $S\in[v,+\infty)$.

这种情况中，寻找方程(1)的解.

使用式(5)，有

$$\sigma(S)=\sigma_+,S\in[v,+\infty)$$

根据常微分方程理论,需要找到2个线性无关解.

在方程式(1)中,选取 $V=S^{\alpha}$,可得

$$0=\left[\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2V}{dS^2}+rS\frac{dV}{dS}-rV\right]\bigg|_{V=S^{\alpha},\sigma=\sigma_+}=$$

$$\frac{\sigma_+^2}{2}S^2\frac{d^2(S^{\alpha})}{dS^2}+rS\frac{d(S^{\alpha})}{dS}-rS^{\alpha}=$$

$$\frac{\sigma_+^2}{2}S^2\alpha(\alpha-1)S^{\alpha-2}+rS\alpha S^{\alpha-1}-rS^{\alpha}=$$

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_+^2\alpha(\alpha-1)+r\alpha-r\right]S^{\alpha}$$

对于所有的 $S\in[v,+\infty)$ 成立. 于是,得出

$$\frac{1}{2}\sigma_+^2\alpha(\alpha-1)+r\alpha-r=0$$

关于 α 的一元二次方程有2个实数根

$$\alpha=1,\ \alpha=-a_+$$

式中 $a_+=\dfrac{2r}{\sigma_+^2}$. 可得一般解

$$V_+(S)=A_+S+B_+S^{-a_+}\tag{45}$$

式中 $a_+=\dfrac{2r}{\sigma_+^2}$. 使用式(45)计算得

$$A_+=\frac{V_+(S)}{S}-B_+S^{-a_+-1}$$

对于所有 $S\in[v,+\infty)$ 成立. 使用上式和边界条件式(4),计算得出

$$A_+=\lim_{S\to+\infty}\left[\frac{V_+(S)}{S}-B_+S^{-a_+-1}\right]=$$

$$\lim_{S\to+\infty}\frac{V_+(S)}{S}-\lim_{S\to+\infty}(B_+S^{-a_+-1})=0$$

因此,得到

$$A_+=0\tag{46}$$

2) $S\in[\omega,v)$.

这种情况下,寻找方程式(1)的解. 根据式(5),有

$$\sigma(S)=\sigma_-,S\in[\omega,v)$$

根据常微分方程理论,需要找到2个线性无关解.

在方程式(1)中,选取 $V=S^{\alpha}$,可得

$$0=\left[\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2V}{dS^2}+rS\frac{dV}{dS}-rV\right]\bigg|_{V=S^{\alpha},\sigma=\sigma_-}=$$

$$\frac{\sigma_-^2}{2}S^2\frac{d^2(S^{\alpha})}{dS^2}+rS\frac{d(S^{\alpha})}{dS}-r(S^{\alpha})=$$

$$\frac{\sigma_-^2}{2}S^2\alpha(\alpha-1)S^{\alpha-2}+rS\alpha S^{\alpha-1}-rS^{\alpha}=$$

$$\left[\frac{\sigma_-^2}{2}\alpha(\alpha-1)+r\alpha-r\right]S^{\alpha}$$

对于所有 $S\in[\omega,v)$ 成立. 于是得出

$$\frac{\sigma_-^2}{2}\alpha(\alpha-1)+r\alpha-r=0$$

关于 α 的一元二次方程有2个实数根

$$\alpha=1,\ \alpha=-a_-$$

式中 $a_-=\dfrac{2r}{\sigma_-^2}$. 可得一般解

$$V_-(S)=A_-S+B_-S^{-a_-}\tag{47}$$

式中 a_- 如式(6)定义.

现在计算 ω、A_-、B_-、B_+.

应用式(20)(45)及式(47),计算

$$0=V_-(v-0)-V_+(v+0)=$$

$$\lim_{S\to v-0}V_-(S)-\lim_{S\to v+0}V_+(S)=$$

$$\lim_{S\to v-0}[A_-S+B_-S^{-a_-}]-$$

$$\lim_{S\to v+0}[A_+S+B_+S^{-a_+}]=$$

$$A_-v+B_-v^{-a_-}-A_+v+B_+v^{-a_+}$$

再使用式(46)得出

$$A_-v+B_-v^{-a_-}=B_+v^{-a_+}\tag{48}$$

应用式(21)(45)及式(47),计算

$$0=V'_-(v-0)-V'_+(v+0)=$$

$$\lim_{S\to v-0}V'_-(S)-\lim_{S\to v+0}V'_+(S)=$$

$$\lim_{S\to v-0}\frac{d}{dS}[A_-S+B_-S^{-a_-}]-$$

$$\lim_{S\to v+0}\frac{d}{dS}[A_+S+B_+S^{-a_+}]=$$

$$\lim_{S\to v-0}[A_-+a_-B_-S^{-a_--1}]-$$

$$\lim_{S\to v+0}[A_+-a_+B_+S^{-a_+-1}]=$$

$$[A_--a_-B_-v^{-a_--1}]-[A_+-a_+B_+v^{-a_+-1}]$$

再使用式(46)得出

$$A_--a_-B_-v^{-a_--1}=-a_+B_+v^{-a_+-1}\tag{49}$$

应用自由边界条件式(2),可得

$$0=\{V(S)-[K-S]\}\mid_{V(S)=V_-(S),S=\omega}=$$

$$\{V_-(S)-[K-S]\}\mid_{S=\omega}=$$

$$V_-(\omega)-[K-\omega]=$$

$$(A_-\omega+B_-\omega^{-a_-})-(K-\omega)$$

这表明

$$A_-\omega+B_-\omega^{-a_-}=K-\omega\tag{50}$$

应用边界条件式(3),可得

$$0=\{V'(S)+1\}\mid_{V=V_-(S),S=\omega}=$$

$$\{V'_-(S)+1\}\mid_{S=\omega}=$$

$$\left\{\frac{d}{dS}[A_-S+B_-S^{-a_-}]+1\right\}\bigg|_{S=\omega}=$$

$$\{A_--a_-B_-S^{-a_--1}+1\}\mid_{S=\omega}=$$

$$A_- - a_- B_- \omega^{-a_- -1} + 1$$

这表明

$$A_- - a_- B_- \omega^{-a_- -1} = -1 \tag{51}$$

在式(51)两端,同乘$\frac{\omega}{a_-}$得出

$$\frac{\omega A_-}{a_-} - B_- \omega^{-a_-} = -\frac{\omega}{a_-}$$

给出

$$A_- = \frac{K-\omega-\frac{\omega}{a_-}}{\omega+\frac{\omega}{a_-}}$$

化简得出

$$A_- = \frac{a_-K}{(1+a_-)\omega} - 1 \tag{52}$$

使用式(51)(52)计算

$$0 = A_- - a_-B_-\omega^{-a_- -1} + 1 = \left[\frac{a_-K}{(1+a_-)\omega} - 1\right] - a_-B_-\omega^{-a_- -1} + 1$$

解出

$$B_- = \frac{K\omega^{a_-}}{1+a_-} \tag{53}$$

在式(48)两边同乘以 a_+v^{-1}之后,再加上式(49),得出

$$a_+v^{-1}[A_-v + B_-v^{-a_-}] + (A_- - a_-B_-v^{-a_- -1}) = 0$$

合并同类项得出

$$(1+a_+)A_- + (a_+v^{-a_- -1} - a_-v^{-a_- -1})B_- = 0$$

整理得出

$$(1+a_+)v^{1+a_-}A_- + (a_+ - a_-)B_- = 0 \tag{54}$$

把式(52)(53)代入式(48),得出

$$\left[\frac{a_-K}{(1+a_-)\omega} - 1\right]V + \frac{K\omega^{a_-}}{1+a_-}v^{-a_-} = B_+v^{-a_+}$$

解得

$$B_+ = \left(\frac{a_-K}{(1+a_-)\omega} - 1\right)v^{a_+ +1} + \frac{K\omega^{a_-}v^{a_+ - a_-}}{1+a_-} \tag{55}$$

把式(52)(53)代入式(54)计算

$$\begin{aligned}0 &= (1+a_+)v^{1+a_-}A_- + (a_+ - a_-)B_- = \\ &(1+a_+)v^{1+a_-}\left[\frac{a_-K}{(1+a_-)\omega} - 1\right] + \\ &(a_+ - a_-)\frac{K\omega^{a_-}}{1+a_-} = \frac{a_-(1+a_+)v^{1+a_-}K}{(1+a_-)\omega} - \\ &(1+a_+)v^{1+a_-} + \frac{(a_+ - a_-)K}{1+a_-}\omega^{a_-} = \\ &\frac{(a_+ - a_-)K}{(1+a_-)\omega}\left[\omega^{a_- +1} - \frac{(1+a_+)(1+a_-)v^{1+a_-}}{(a_+ - a_-)K}\omega + \frac{a_-(a_+ +1)v^{a_- +1}}{a_+ - a_-}\right] = \\ &\frac{(a_+ - a_-)K}{(1+a_-)\omega}[\omega^m - p\omega + q]\end{aligned}$$

式中 p、q、m 如式(11)~(13)所示. 由于

$$\frac{(a_+ - a_-)K}{(1+a_-)\omega} \neq 0$$

因此,上述计算表明

$$f(\omega) = \omega^m - p\omega + q = 0 \tag{56}$$

假设

$$a_+ < a_- \tag{57}$$

事实上,如果式(57)成立,使用式(11),可得

$$p < 0 \tag{58}$$

应用式(10)(58)得

$$f'(x) = mx^{m-1} - p > 0, x \in (0, +\infty) \tag{59}$$

这表明,函数 $f'(x)$ 在$(0, +\infty)$内严格单调增加,进一步,还有

$$f(0) = f(x)|_{x=0} = (x^m - px + q)|_{x=0} = q = \frac{a_-(a_+ +1)v^{a_- +1}}{a_+ - a_-}$$

该式及式(57)表明

$$f(0) = q < 0 \tag{60}$$

综合式(59)(60),可以断言:代数方程

$$f(x) = 0 \tag{61}$$

在$(0,v)$上有唯一解,当且仅当

$$f(v) = v^m - pv + q > 0 \tag{62}$$

另一方面,使用式(11)~(13)计算

$$\begin{aligned}f(v) &= v^m - pv + q = \\ &v^{a_- +1} - \frac{(a_- +1)(a_+ +1)v}{(a_+ + a_-)K}v + \frac{a_-(a_+ +1)v^{a_- +1}}{a_+ + a_-} = \\ &v^{a_- +1}\left[1 - \frac{(a_- +1)(a_+ +1)v}{(a_+ + a_-)K} + \frac{a_-(a_+ +1)}{a_+ + a_-}\right] = \\ &v^{a_- +1}\left[\frac{a_+(1+a_-)}{a_+ + a_-} - \frac{(a_- +1)(a_+ +1)}{(a_+ + a_-)K}v\right] = \\ &\frac{(a_- +1)(a_+ +1)v^{a_- +1}}{(a_+ + a_-)K}\left[\frac{a_+K}{1+a_+} - v\right] = \\ &-\frac{(a_- +1)(a_+ +1)v^{a_- +1}}{(a_+ + a_-)K}\left[v - \frac{a_+K}{1+a_+}\right]\end{aligned}$$

这表明

$$f(v) = \frac{(a_- +1)(a_+ +1)v^{a_- +1}}{(a_+ - a_-)K}\left[v - \frac{a_+K}{1+a_+}\right] \tag{63}$$

使用式(57),又可断言:$f(v) > 0$ 当且仅当

$$v > \frac{a_+K}{1+a_+}$$

综合该不等式及式(61)(62),断言:

在式(14)~(15)条件下,代数方程 $f(x)=0$ 在 $(0,v)$ 是有唯一解. 定理 2 得证.

3 定理 3 的证明

类似于定理 1.2 的计算,得到下列结论 1 和结论 2.

结论 1 当 $S\in[v,+\infty)$ 时,期权函数

$$V_+(S)=A_+S+B_+S^{-a_+}$$

式中 A_+ 与 B_+ 为待定常数.

结论 2 当 $S\in[\omega,v)$ 时,期权函数

$$V_-(S)=A_-S+B_-S^{-a_-}$$

式中 A_- 与 B_- 为待定常数.

同样,类似于定理 1.2 的计算,使用边界条件(2)~(4)以及间断条件(28)~(29)得出

$$A_+=0$$

$$B_+=\left[\frac{a_-K}{(1+a_-)\omega}-1\right]v^{a_++1}+\frac{K\omega^{a_-}-v^{a_+-a_-}}{1+a_-}$$

$$A_-=\frac{a_-K}{(1+a_-)K}-1$$

$$B_-=\frac{K\omega^{a_-}}{1+a_-}$$

把 A_- 与 B_- 表达式代入式(54),类似于定理 1.2 的计算得出

$$0=\frac{(a_+-a_-)K}{(1+a_-)\omega}[\omega^m-p\omega+q]$$

即

$$f(\omega)=\omega^m-p\omega+q=0$$

式中 p、q、m 定义如式(11)~(13)所示.

上述诸结论,都是在最佳实施边界 $S=\omega\in(0,v)$ 的假设下推导完成的.

接下来,只须证明当 $a_+>a_-$, $v>\dfrac{a_+K}{1+a_+}$ 时,代数方程 $f(x)=0$ 在 $x\in(0,v)$ 内只有一个正的实数根. 那么这个正的实数根就是要寻找的最佳实施边界 $S=\omega$.

事实上,使用式(22),有

$$a_+>a_- \tag{64}$$

事实上,如果式(64)成立,则使用式(11)(12)得

$$p>0,\ q>0 \tag{65}$$

再使用式(10),对于所有的 $x\in(0,+\infty)$,计算

$$f'(x)=mx^{m-1}-p \tag{66}$$

另一方面,还有

$$f(0)=q>0 \tag{67}$$

式中 q 如式(12)所示.

进一步,使用式(10)~(13)和式(64),计算

$$f(v)=v^m-pv+q=v^{a_-+1}-$$

$$\frac{(a_-+1)(a_++1)v^{a_-+1}}{(a_++a_-)K}v+\frac{a_-(a_++1)v^{a_-+1}}{a_++a_-}=$$

$$v^{a_-+1}\left[\frac{a_+(1+a_-)}{a_++a_-}-\frac{(a_-+1)(a_++1)}{(a_++a_-)K}v\right]=$$

$$\frac{-(a_-+1)(a_++1)v^{a_-+1}}{(a_++a_-)K}\left[v-\frac{a_+K}{1+a_+}\right]$$

应用该式及式(23)得

$$f(v)<0 \tag{68}$$

应用式(66),可以找到唯一的正根 X,使得

$$f'(X)=0 \tag{69}$$

式中

$$X=\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} \tag{70}$$

使用式(66)(69)得出

$$f'(x)=mx^{m-1}-p<0,x\in(0,X)$$

$$f'(x)=mx^{m-1}-p>0,x\in(X,+\infty)$$

表明 $f(x)$ 在 $(0,X)$ 内严格单调增加. 这意味着, $f(x)$ 在 $x=X$ 处取到 $(0,+\infty)$ 内的最小值,即

$$f(X)=\min_{x\in(0,+\infty)}f(x) \tag{71}$$

使用式(11)~(13),计算

$$X^{m-1}-v^{m-1}=\frac{p}{m}-v^{m-1}=$$

$$\frac{\left[\dfrac{(a_-+1)(a_++1)v^{a_-+1}}{(a_++a_-)K}\right]}{[a_-+1]-v^{(a_-+1)-1}}=$$

$$\frac{(1+a_+)v^{1+a_-}}{(a_+-a_-)K}-v^{a_-}=$$

$$\frac{(1+a_+)v^{a_-}}{(a_+-a_-)K}\left(v-\frac{(a_+-a_-)K}{a_++1}\right)$$

应用式(23),并且使用上述不等式,可得

$$X^{m-1}-v^{m-1}>0$$

于是得出

$$X>v \tag{72}$$

$f(x)$ 在 $(0,X)$ 内严格单调减少,且使用式(72)可以断言, $f(x)$ 在 $(0,v)\subset(0,X)$ 内也严格单调减少. 进一步,还有

$$f(0)=q>0,f(v)<0$$

应用数学分析技巧,代数方程 $f(x)=0$ 在 $(0,v)$ 内有唯一解 $x=\omega\in(0,v)$. 因此定理 3 得证.

4 结论

1) 使用待定系数法,求解 Black-Scholes 方程解

的 2 个分支.

2）把 Black-Scholes 方程解的 2 个分支进行拼接. 在拼接处,需要满足包括解的连续性在内的一些间断条件.

3）当波动率 σ 是间断函数时,找到了一个永久美式看跌期权的定价公式. 这个公式丰富了期权定价理论. 它不仅给投资者提供了规避金融风险的理论,也为管理者制定金融政策提供了重要参考.

参考文献：

[1] BUFF R. Uncertain volatility methods theory and applications[M]. New York: Springer Verlag, 2002: 33-78.

[2] HULL J C. Options, futures and other derivatives[M]. New Jersey: Prentice Hall, 2003: 22-54.

[3] JIANG L. Mathematical modeling and methods of option pricing[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2005: 113-200.

[4] MERTON R C. Continuous-time finance [M]. New Jersey: Wiley-Blackwell, 1997: 90-108.

[5] FRIEDMAN A. Variational principles and free boundary problems[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1982: 17-33.

[6] HULL J. Options, futures and other derivatives[M]. 4th ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2000: 155-173.

[7] JIANG L. Analysis of pricing American options on the maximum (minimum) of two risk assets[J]. Interface & Free Boundary, 2002, 4: 27-46.

[8] JIANG L, BIAN B. Identifying the principal coefficient of parabolic equations with non-divergent form[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2005, 12: 48-65.

[9] JIANG L, BIAN B. The regularized implied local volatility equations—a new model to recover the volatility of underlying asset from option pricing[R]. Shanghai: Tongji University, 2005: 1-33.

[10] JIANG L, DAI M. On path-dependent options, mathematical finance-theory & applications[M]. Beijing: Higher Education Press, 2005: 290-317.

[11] JIANG L, DAI M. Convergence of explicit difference scheme and binomial tree method for American options[J]. Journal of Computational Mathematics, 2004, 22(3): 371-380.

[12] JIANG L, DAI M. Convergence of binomial method for European/American path-dependent options[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 2004, 42: 1094-1109.

[13] JIANG L, TAO Y. Identifying the volatility of underlying assets from option prices[J]. Inverse Problems, 2001, 17: 137-155.

[14] JIANG L, CHEN Q, WANG L, et al. A new well-posed algorithm to recover implied volatility[J]. Quantitative Finance, 2003, 3: 451-457.

[15] JIANG L, YANG D, ZHANG S. On pricing model of reset option with N predetermined levels[J]. Journal of Systems Science & Complexity, 2004, 17: 137-142.

[16] KARATZAS I, SHREVE S. Methods of mathematical finance[M]. New York: Springer Verlag, 1998: 125-132.

[17] MUSIELA M. RUTKOWSKI M. Martingale methods in financial modelling[M]. New York: Springer Verlag, 1998: 136-151.

[18] RICHTMYER R D. Difference methods for initial-value problems[M]. New York: Inter-science Publishers, Inc, 1957: 1-25.

[19] WILMOTT P, DEWYNNE J N, HOWISON S D. Option pricing: mathematical models and computation [M]. Oxford: Oxford Financial Press, 1993: 307-321.

[20] WILMOTT P. Derivatives: the theory and practice of financial engineering[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1998: 513-529.

（责任编辑　杨开英）