非等熵可压缩 Navier-Stokes-Maxwell 方程组 Cauchy 问题解的整体存在性

李 新, 冯跃红, 王 术
(北京工业大学应用数理学院, 北京 100124)

摘 要: 考察粘性等离子体物理中的非等熵可压缩 Navier-Stokes-Maxwell 方程组. 借助非常数平衡解的小性以及对称子技巧,研究了三维全空间上的 Cauchy 问题. 在初值为该平衡解的一个小摄动前提下,证明了该问题存在整体唯一光滑解.

关键词: 非等熵可压缩 Navier-Stokes-Maxwell 方程组; 粘性等离子体; 整体光滑解; 非常数平衡解
中图分类号: O 175.29 **文献标志码**: A **文章编号**: 0254-0037(2018)12-1567-06
doi: 10.11936/bjutxb2017110006

Global Existence of Solutions to Cauchy Problem for Non-isentropic Compressible Navier-Stokes-Maxwell Systems

LI Xin, FENG Yuehong, WANG Shu
(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: This paper is concerned with non-isentropic compressible Navier-Stokes-Maxwell systems arising from viscosity plasmas. By using techniques of symmetrizer and the smallness of non-constant steady-state solutions, the global existence of solutions to Cauchy problems with prepared initial data was investigated. It is shown that this problem admits globally smooth solutions near a non-constant steady state.

Key words: non-isentropic compressible Navier-Stokes-Maxwell systems; viscosity plasmas; global smooth solution; non-constant steady-state solution

粘性等离子体可压缩 Navier-Stokes-Maxwell 方程组用来描述带电粒子流在电磁场中的输运现象[1-2]. 它由描述粘性流体运动的非等熵可压缩 Navier-Stokes(NS)方程组和描述自洽电磁场的 Maxwell 方程组通过电磁场中的 Lorentz 力耦合而成,既具有 NS 方程的难点,也包含电磁场方程产生的困难,研究起来极具挑战性. 目前有许多关于理想(无粘)等离子体物理模型 Euler-Maxwell 方程组的相关研究,如数值模拟计算、模型间的小参数渐近机制、解的整体存在性以及渐近性态等方面. 对于简化的一维 Euler-Maxwell 系统,文献[3]运用补偿列紧性的方法获得了弱解的整体存在性;关于小参数渐近机制的研究,参见文献[4]及其参考文献;对于光滑解的整体存在性及其渐近性态问题的研究,参见文献[5-9];关于数值模拟计算等方面的研究,参见文献[10]及其参考文献;对于在非常数平衡解附近光滑解的存在性研究,参见文献[11]. 然而目前尚无关于粘性等离子体物理模型可压缩 Navier-Stokes-Maxwell 方程组在非常数平衡解附近光滑解的整体存在性的研究,而这是非常重要的,因为任何

收稿日期: 2017-11-01
基金项目: 北京市自然科学基金资助项目(1164010,1132006);国家自然科学基金资助项目(11771031,11371042)
作者简介: 李 新(1981—), 女, 博士研究生, 主要从事应用偏微分方程方面的研究, E-mail: lixin91600@emails.bjut.edu.cn

流体都是有粘性的. 本文旨在回答上述问题. 本文的结果对推动等离子体物理的发展提供了重要的理论依据.

1 模型与定理

本文研究形式如下的粘性等离子体非等熵可压缩 Navier-Stokes-Maxwell 方程组:

$$\partial_t n + \nabla(nu) = 0 \tag{1}$$

$$\partial_t u + u\nabla u + \frac{\nabla(n\theta)}{n} = -(E + u\times B) + \frac{\Delta u}{n} \tag{2}$$

$$\partial_t \theta + \frac{2}{3}\theta\nabla u + u\nabla\theta = \theta_* - \theta - \frac{1}{3}|u|^2 \tag{3}$$

$$\partial_t E - \nabla B = nu,\ \nabla E = b - n \tag{4}$$

$$\partial_t B + \nabla E = 0,\ \nabla B = 0 \tag{5}$$

式中$(t,x)\in\mathbb{R}^+\mathbb{R}^3$. 未知变量分别为:电子流密度 $n>0$,电子流速度 $u\in\mathbb{R}^3$,绝对温度 $\theta>0$,电场强度 $E\in\mathbb{R}^3$,磁场强度 $B\in\mathbb{R}^3$. 常数 $\theta_*>0$ 表示背景温度,光滑函数 $b=b(x)\geqslant \text{const.}>0$ 表示静止的带正电离子的密度(背景密度).

本文研究式(1)~(5)的 Cauchy 问题,初值为

$$(n,u,\theta,E,B)|_{t=0} = (n_0,u_0,\theta_0,E_0,B_0) \tag{6}$$

其满足相容性条件

$$\nabla E_0 = b - n_0,\ \nabla\cdot B_0 = 0 \tag{7}$$

记$(\tilde{n}(x),0,\theta_*,\tilde{E}(x),0)$为式(1)~(5)的非常数平衡解,其中 $\tilde{n}(x)>0$,$\tilde{E}(x)\in\mathbb{R}^3$,其满足

$$\frac{1}{\tilde{n}}\nabla(\tilde{n}\theta_*) = -\tilde{E} \tag{8}$$

$$\nabla\tilde{E} = b(x) - \tilde{n} \tag{9}$$

$$\nabla\tilde{E} = 0 \tag{10}$$

由式(10)可知存在势函数 $\tilde{\phi}$ 满足: $-\nabla\tilde{\phi}=\tilde{E}$, 于是式(8)~(10)可转化为

$$\nabla(\theta_*\ln\tilde{n} - \tilde{\phi}) = 0 \tag{11}$$

$$-\Delta\tilde{\phi} = b(x) - \tilde{n} \tag{12}$$

下面考察 $b(x)=n_*+\bar{b}(x)$的情形. 此处 n_* 为一正常数,$\bar{b}$ 满足:当$|x|\to\infty$ 时,$\bar{b}(x)\to 0$. 寻找式(11)~(12)形如 $\tilde{n}(x)=n_*+\bar{n}(x)$的解. 于是由式(11)可知

$$\bar{n}(x) = n_*\left(\exp\left(\frac{\tilde{\phi}(x)}{\theta_*}\right) - 1\right) \tag{13}$$

这里假设当$|x|\to\infty$ 时,$(\bar{n},\tilde{\phi})(x)\to 0$. 进而将式(13)代入式(12)可知

$$-\Delta\tilde{\phi} + \frac{n_*}{\theta_*}\tilde{\phi} = \bar{b}(x) - n_*\left(\exp\left(\frac{\tilde{\phi}}{\theta_*}\right) - 1 - \frac{\tilde{\phi}}{\theta_*}\right) \tag{14}$$

众所周知,采用经典的 Schauder 不动点定理或极小化方法容易得到上述椭圆方程光滑解的存在唯一性,进而可得式(1)~(5)的非常数平衡解存在唯一性定理.

命题 1 令 $s\geqslant 0$,常数 $n_*,\theta_*>0$,$b-n_*\in H^s(\mathbb{R}^3)$. 那么存在正常数 δ_0 使得:只要 $\|b-n_*\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}\leqslant\delta_0$,则问题(11)~(12)存在唯一解$(\tilde{n},\tilde{E})$满足

$$\tilde{n}-n_*\in H^{s+2}(\mathbb{R}^3),\tilde{E}\in H^{s+1}(\mathbb{R}^3)$$

及

$$\|\tilde{n}-n_*\|_{s+2} + \|\tilde{E}\|_{s+1} \leqslant C\|b-n_*\|_s \tag{15}$$

式中 C 为任意正常数. 进而有$(\tilde{n}(x),0,\theta_*,\tilde{E}(x),0)$为式(1)~(5)的一个非常数平衡解.

这里 $H^s(\mathbb{R}^3)$表示$\mathbb{R}^3$ 上 s 阶常用 Sobolev 空间,$H^s(\mathbb{R}^3)=\{f|\partial_x^\alpha f\in L^2(\mathbb{R}^3),|\alpha|\leqslant s\}$,其范数 $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}=\sqrt{\sum_{|\alpha|\leqslant s}|\partial^\alpha f|^2}$ 简记为: $\|f\|_s$.

接下来,期望在命题 1 给出的非常数平衡解$(\tilde{n}(x),0,\theta_*,\tilde{E}(x),0)$附近建立 Cauchy 问题式(1)~(6)的光滑解的整体存在性.

众所周知,当 $n,\theta>0$ 时,方程组(1)~(5)为可对称化的双曲-抛物组. 于是借助 Kato[12] 以及 Matsumura 等[13-14] 的结论可知,只要初值光滑,Cauchy 问题(1)~(6)就一定存在局部唯一光滑解.

命题 2(光滑解的局部存在唯一性,参见文献[12,15-16]) 令式(7)成立,整数 $s\geqslant 4$. $n_*,\theta_*>0$ 为任意给定常数. 记$(\tilde{n},\tilde{E})$为命题 1 给出的问题(11)~(12)的光滑解. 对给定常数 $\kappa>0$,初值 n_0,$\theta_0\geqslant 2\kappa$. 则如果

$$(n_0-\tilde{n},u_0,\theta_0-\theta_*,E_0-\tilde{E},B_0)\in H^s(\mathbb{R}^3)$$

那么存在 $T>0$ 使得问题(1)~(6)存在局部唯一光滑解,满足:$(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^3$,及

$$u\in C^1([0,T];H^{s-2}(\mathbb{R}^3))\cap C([0,T];H^s(\mathbb{R}^3))$$

$$(n-\tilde{n},\theta-\theta_*,E-\tilde{E},B)\in$$
$$C^1([0,T];H^{s-1}(\mathbb{R}^3))\cap C([0,T];H^s(\mathbb{R}^3))$$

本文的主要结果如下:

定理 1 在命题 2 的假设条件下,存在常数 $\delta_0>0$ 足够小,不依赖于任何时间 $t>0$,使得若

$$\|(\nabla\bar{n},n_0-\tilde{n},u_0,\theta_0-\theta_*,E_0-\widetilde{E},B_0)\|_s\leqslant\delta_0$$

则 Cauchy 问题(1)～(6)存在唯一整体光滑解

$$u\in C^1(\mathbb{R}^+;H^{s-2}(\mathbb{R}^3))\cap C(\mathbb{R}^+;H^s(\mathbb{R}^3)) \tag{16}$$

$$(n-\tilde{n},\theta-\theta_*,E-\widetilde{E},B)\in C^1(\mathbb{R}^+;H^{s-1}(\mathbb{R}^3))\cap C(\mathbb{R}^+;H^s(\mathbb{R}^3)) \tag{17}$$

并且对于任意 $t>0$，满足

$$\|(n-\tilde{n},u,\theta-\theta_*,E-\widetilde{E},B)(t)\|_s^2+\int_0^t\|(n-\tilde{n},\nabla u,\theta-\theta_*)(\tau)\|_s^2\mathrm{d}\tau\leqslant C\|(n_0-\tilde{n},u_0,\theta_0-\theta_*,E_0-\widetilde{E},B_0)\|_s^2 \tag{18}$$

注 1. 方程组(1)～(5)中速度粘性项 $\Delta u/n$ 与温度耗散项 $\theta-\theta_*$ 在证明定理 1 的过程中起关键作用.

本文其余部分结构如下：第 2 节给出准备工作；第 3 节建立了粘性流体方程的耗散估计，进而获得光滑解的整体存在性；第 4 节陈述本文结论.

2　准备工作

首先引入一些记号. 用 $\|\cdot\|$和 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 分别表示空间 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 和 $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 的范数. 用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示空间 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上的内积. 指标 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{N}^3$，记：$\partial^\alpha=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}$，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

现在设 (n,u,θ,E,B) 为 Cauchy 问题(1)～(6)的唯一局部光滑解. 令

$$n=\tilde{n}+n_*+\rho,\ \theta=\theta_*+\Theta,\ E=\widetilde{E}+F \tag{19}$$

$$\boldsymbol{U}=(\rho,u,\Theta)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{W}=(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}},F,B)^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

这里$(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 表示向量$(\cdot)$转置. 于是式(1)～(7)可改写为

$$\partial_t\rho+u\nabla\rho+n\nabla u+u\nabla\bar{n}(x)=0 \tag{21}$$

$$\partial_t u+(u\nabla)u+\frac{\theta}{n}\nabla\rho+\nabla\Theta+\frac{\Theta}{n}\nabla\bar{n}-\frac{\theta_*\rho}{n\tilde{n}}\nabla\bar{n}=-(F+u\times B)-u \tag{22}$$

$$\partial_t\Theta+\frac{2}{3}\theta\nabla u+u\nabla\Theta=-\frac{1}{3}|u|^2-\Theta \tag{23}$$

$$\partial_t F-\nabla\times B=nu,\ \nabla F=-\rho \tag{24}$$

$$\partial_t B+\nabla F=0,\ \nabla B=0 \tag{25}$$

其初始条件为

$$\boldsymbol{W}|_{t=0}=\boldsymbol{W}_0=(\rho_0,u_0,\Theta_0,F_0,B_0)^{\mathrm{T}} \tag{26}$$

满足相容性条件

$$\nabla F^0=-\rho^0,\ \nabla B^0=0 \tag{27}$$

式中：$\rho_0=n_0-\tilde{n}$，$\Theta_0=\theta_0-\theta_*$，$F^0=E^0-\widetilde{E}$.

此外，NS 方程(21)～(23)可写为矩阵形式

$$\partial_t\boldsymbol{U}+\sum_{j=1}^3\boldsymbol{A}_j\partial_j\boldsymbol{U}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2 \tag{28}$$

式中

$$\boldsymbol{A}_j=\begin{pmatrix} u_j & n\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}} & 0\\ \dfrac{\theta}{n}\boldsymbol{e}_j & u_j\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{e}_j\\ 0 & \dfrac{2}{3}\theta\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}} & u_j\end{pmatrix},\ j=1,2,3 \tag{29}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 0 & (\nabla\bar{n})^{\mathrm{T}} & 0\\ -\dfrac{\theta_*}{n\tilde{n}} & 0 & \dfrac{\nabla\bar{n}}{n}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_1=-\left(0,\ F+u\times B,\ \frac{1}{3}|u|^2\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{K}_2=\left(0,\ \frac{\Delta u}{n},\ -\Theta\right)^{\mathrm{T}}$$

式中：(e_1,e_2,e_3)为$\mathbb{R}^3$ 的标准正交基，$\boldsymbol{I}_3$ 为 3×3 单位矩阵.

易知，当 $n_*+\bar{n}+\rho,\theta_*+\Theta>0$ 时，式(28)关于 U 是可对称化双曲–抛物组. 事实上，由常数 $n_*,\theta_*\geqslant$ const. >0 及 $\bar{n},\rho,\Theta$ 非常接近零，可得 $n_*+\bar{n}+\rho$，$\theta_*+\Theta\geqslant$const. >0.

令 $T>0$，$\boldsymbol{W}$ 是式(21)～(25)定义在$[0,T]$上的光滑解，初值为 $\boldsymbol{W}_0$，解的存在性由命题 2 给出. 定义

$$\omega_T=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{W}\|_s \tag{30}$$

于是，由连续嵌入 $H^s(\mathbb{R}^3)\subset L^\infty(\mathbb{R}^3)$，$s\geqslant2$，可得：存在常数 $C_*>0$ 使得

$$\|f\|_{L^\infty}\leqslant C_*\|f\|_s,\ \forall f\in H^s(\mathbb{R}^3)$$

3　主要结果的证明

本节将在非常数平衡解$(\tilde{n}(x),0,\theta_*,\widetilde{E}(x),0)$附近建立 Cauchy 问题(1)～(7)的小摄动光滑解的整体存在唯一性.

3.1　一致先验估计

注意到，在光滑解的意义下，问题(1)～(7)等价于问题(21)～(27). 于是，基于命题 2 已经给出了光滑解的局部存在性这一事实，证明定理 1 的关键在于建立一致先验估计[17-22]. 为此，需要建立以下 2 个引理. 首先，引入能量泛函 $E_s(t)$与耗散泛函 $H_s(t)$如：

$$E_s(t)=\|\boldsymbol{W}(t)\|_s^2,\ H_s(t)=\|(\rho,\nabla u,\boldsymbol{\Theta})(t)\|_s^2 \tag{31}$$

记常数 $C>0$ 不依赖任意时间 $t>0$ 和 T,在不同的地方值可以不同.

引理 1 在定理 1 的条件下,存在 $\delta_0>0$ 充分小,若

$$\omega_T+\|\nabla\overline{n}\|_s\leqslant\delta\leqslant\delta_0 \tag{32}$$

则对任意 $t\in[0,T]$ 成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_s(t)+\|(\nabla u,\boldsymbol{\Theta})\|_s^2\leqslant C\|\nabla\overline{n}\|_s\|\rho\|_s^2+CE_s^{\frac{1}{2}}(t)H_s(t) \tag{33}$$

证明:对于 $\alpha\in\mathbb{N}^3$, $|\alpha|\leqslant s$,对式(28)求 ∂^α,然后左乘上对称子 $\boldsymbol{A}_0$ 后有

$$\boldsymbol{A}_0\,\partial_t\partial^\alpha\boldsymbol{U}+\sum_{j=1}^3\widetilde{\boldsymbol{A}}_j\,\partial_j\partial^\alpha\boldsymbol{U}+\boldsymbol{A}_0\,\partial^\alpha(\boldsymbol{MU})=\boldsymbol{A}_0\,\partial^\alpha(\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2)+h_\alpha \tag{34}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}\dfrac{\theta}{n}u_j & 0 & 0\\ 0 & n\boldsymbol{I}_3 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{3}{2}\dfrac{n}{\theta}\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_j=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_j=\begin{pmatrix}\dfrac{\theta}{n}u_j & \theta e_j^{\mathrm{T}} & 0\\ \theta e_j & nu_j\boldsymbol{I}_3 & ne_j\\ 0 & ne_j^{\mathrm{T}} & \dfrac{3}{2}\dfrac{n}{\theta}u_j\end{pmatrix}$$

$$h_\alpha=-\sum_{j=1}^3\boldsymbol{A}_0(\partial^\alpha(\boldsymbol{A}_j\,\partial_j\boldsymbol{U})-\boldsymbol{A}_j\,\partial^\alpha\partial_j\boldsymbol{U})$$

显然,当 $|\alpha|=0$ 时, $h_\alpha=0$.

令式(34)两端分别与 $2\,\partial^\alpha\boldsymbol{U}$ 在空间 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上做内积可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{A}_0\,\partial^\alpha\boldsymbol{U},\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle=\\&2\langle h_\alpha,\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle+\langle\mathrm{div}\boldsymbol{A}\,\partial^\alpha\boldsymbol{U},\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle-\\&2\langle\boldsymbol{A}_0\,\partial^\alpha(\boldsymbol{MU}),\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle+\\&2\langle\boldsymbol{A}_0\,\partial^\alpha(\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2),\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle\end{aligned} \tag{35}$$

此处

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\partial_t\boldsymbol{A}_0+\sum_{j=1}^3\partial_j\widetilde{\boldsymbol{A}}_j \tag{36}$$

下面估计式(35)右端各项. 关于第 1 项,由 h_α 的定义,Moser 型不等式以及 Sobolev 连续嵌入定理可得

$$2\langle h_\alpha,\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle\leqslant C\|(\rho,u,\boldsymbol{\Theta})\|_sH_s(t) \tag{37}$$

关于第 2 项,由小性条件(32)以及 Moser 型不等式知

$$\langle\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,\partial^\alpha\boldsymbol{U},\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle\leqslant C\|(\rho,u,\boldsymbol{\Theta})\|_s\|\nabla(\rho,u,\boldsymbol{\Theta})\|_{s-1}^2 \tag{38}$$

关于第 3 项,由 $\boldsymbol{M}$ 的定义、小性条件(32)、Moser 型不等式、Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$|\langle\boldsymbol{A}_0\,\partial^\alpha(\boldsymbol{MU}),\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle|\leqslant\varepsilon\|\nabla u\|_s^2+C\|\nabla\overline{n}\|_s\|\rho\|_s^2 \tag{39}$$

关于式(35)的最后一项,借助 Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}&2\langle\boldsymbol{A}_0\,\partial^\alpha(\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2),\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle\leqslant\\&-2\langle\partial^\alpha(nu),\partial^\alpha\boldsymbol{F}\rangle-2\|\partial^\alpha\nabla u\|^2-\\&3\left\langle\frac{n}{\theta},|\partial^\alpha\boldsymbol{\Theta}|^2\right\rangle+CE_s^{\frac{1}{2}}(t)\|(\rho,\nabla u)\|_s^2\end{aligned} \tag{40}$$

另外,Maxwell 方程组(24)~(25)做能量估计可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\partial^\alpha\boldsymbol{F}\|^2+\|\partial^\alpha\boldsymbol{B}\|^2)=2\langle\partial^\alpha(nu),\partial^\alpha\boldsymbol{F}\rangle \tag{41}$$

于是,合并式(35)~(41)可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\langle\boldsymbol{A}_0\,\partial^\alpha\boldsymbol{U},\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle+\|\partial^\alpha(\boldsymbol{F},\boldsymbol{B})\|^2)+\\&2\|\partial^\alpha\nabla u\|^2+3\left\langle\frac{n}{\theta},|\partial^\alpha\boldsymbol{\Theta}|^2\right\rangle\leqslant\\&\varepsilon\|\nabla u\|_s^2+C\|\nabla\overline{n}\|_s\|\rho\|_s^2+CE_s^{\frac{1}{2}}(t)H_s(t)\end{aligned} \tag{42}$$

借助 $\langle\boldsymbol{A}_0\,\partial^\alpha\boldsymbol{U},\partial^\alpha\boldsymbol{U}\rangle+\|\partial^\alpha(\boldsymbol{F},\boldsymbol{B})\|^2$ 与 $\|\partial^\alpha\boldsymbol{W}\|^2$ 的等价性,式(42)关于指标 α 求和, $|\alpha|\leqslant s$ 并取 $\varepsilon>0$ 充分小,可知式(33)成立. 证毕.

引理 2 在引理 1 的条件下,对任意 $t\in[0,T]$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_s(t)+H_s(t)\leqslant C(\|\nabla\overline{n}\|_s+E_s^{\frac{1}{2}}(t))H_s(t) \tag{43}$$

证明:对于 $\alpha\in\mathbb{N}^3$, $|\alpha|\leqslant s-1$,对式(22)求 ∂^α,然后在空间 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上与 $\partial^\alpha\nabla\rho$ 内积可得

$$\begin{aligned}&\left\langle\frac{\theta}{n},|\nabla\partial^\alpha\rho|^2\right\rangle+\langle\nabla\partial^\alpha\rho,\partial^\alpha\boldsymbol{F}\rangle=\\&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\nabla\partial^\alpha\rho,\partial^\alpha u\rangle+\langle\nabla\partial^\alpha\partial_t\rho,\partial^\alpha u\rangle-\\&I_1(t)-\sum_{\beta<\alpha}C_\alpha^\beta I_{2\beta}(t)\end{aligned} \tag{44}$$

其中

$$\begin{aligned}&I_1(t)=\langle u\,\nabla\partial^\alpha u,\nabla\partial^\alpha\rho\rangle+\langle\nabla\partial^\alpha\boldsymbol{\Theta},\nabla\partial^\alpha\rho\rangle-\\&\left\langle\frac{\partial^\alpha\Delta u}{n},\nabla\partial^\alpha\rho\right\rangle+\langle\partial^\alpha u\boldsymbol{B},\nabla\partial^\alpha\rho\rangle-\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\boldsymbol{\Theta}}{n}\partial^\alpha(\nabla\bar{n}),\nabla\partial^\alpha\rho\right\rangle+\left\langle\frac{\theta_*\rho}{n\tilde{n}}\partial^\alpha(\nabla\bar{n}),\nabla\partial^\alpha\rho\right\rangle$$

$$I_{2\beta}(t)=$$

$$\left\langle\partial^{\alpha-\beta}\left(\frac{\theta}{n}\right)\nabla\partial^\beta\rho,\nabla\partial^\alpha\rho\right\rangle+\langle\partial^{\alpha-\beta}u\,\nabla\partial^\beta u,\nabla\partial^\alpha\rho\rangle-$$

$$\left\langle\partial^{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{n}\right)\partial^\beta\Delta u,\nabla\partial^\alpha\rho\right\rangle+\langle\partial^\beta u\times\partial^{\alpha-\beta}\boldsymbol{B},\nabla\partial^\alpha\rho\rangle+$$

$$\left\langle\left(\partial^{\alpha-\beta}\left(\frac{\theta_*\rho}{n\tilde{n}}\right)-\partial^{\alpha-\beta}\left(\frac{\boldsymbol{\Theta}}{n}\right)\right)\partial^\beta(\nabla\bar{n}),\nabla\partial^\alpha\rho\right\rangle$$

首先，由 $n,\theta\geqslant\text{const.}>0$ 可知 $\frac{\theta}{n}\geqslant\frac{1}{C}$. 进而，由式(24)的第 2 部分以及分部积分公式可得

$$\left\langle\frac{\theta},{n},|\nabla\partial^\alpha\rho|^2\right\rangle+\langle\nabla\partial^\alpha\rho,\partial^\alpha F\rangle\geqslant\frac{1}{C}\|\partial^\alpha\rho\|_1^2 \tag{45}$$

其次，由分部积分公式和 Leibniz 公式可知

$$\langle\nabla\partial^\alpha\partial_t\rho,\partial^\alpha u\rangle\leqslant$$

$$C\|\nabla u\|_{s-1}^2+\|(\rho,u)\|_s\|(\rho,\nabla u)\|_s^2 \tag{46}$$

然后，由小性条件(32)、Cauchy-Schwarz 不等式及分部积分公式可知

$$|I_1(t)+I_2(t)|\leqslant$$

$$\varepsilon\|\rho\|_s^2+C\|(\nabla u,\boldsymbol{\Theta})\|_s^2+C\|\nabla\bar{n}\|_s\|\rho\|_s^2+$$

$$C\|(\rho,u,\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{B})\|_s\|(\rho,\nabla u)\|_s^2 \tag{47}$$

合并式(44)～(47)可得

$$\frac{1}{C}\|\partial^\alpha\rho\|_1^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\nabla\partial^\alpha\rho,\partial^\alpha u\rangle\leqslant$$

$$\varepsilon\|\rho\|_s^2+C\|(\nabla u,\boldsymbol{\Theta})\|_s^2+C\|\nabla\bar{n}\|_s\|\rho\|_s^2+$$

$$C\|(\rho,u,\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{B})\|_s\|(\rho,\nabla u)\|_s^2 \tag{48}$$

式(48)关于 $|\alpha|\leqslant s-1$ 求和并取 $\varepsilon>0$ 充分小可得

$$\|\rho\|_s^2+c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{|\alpha|\leqslant s-1}\langle\nabla\partial^\alpha\rho,\partial^\alpha u\rangle\leqslant$$

$$C\|(\nabla u,\boldsymbol{\Theta})\|_s^2+C\|\nabla\bar{n}\|_s\|\rho\|_s^2+$$

$$C\|(\rho,u,\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{B})\|_2\|(\rho,\nabla u)\|_s^2$$

其中 $c>0$ 为一小常数，满足

$$c\sum_{|\alpha|\leqslant s-1}\langle\nabla\partial^\alpha\rho,\partial^\alpha u\rangle\leqslant\frac{1}{2}E_s(t)$$

故而联合引理 1 的式(33)可得式(43)成立. 证毕.

3.2　整体存在性的证明

由引理 2 可知，若 $C_2(\|\nabla\bar{n}\|+\omega_T)<1$，可知式(43)右端项可以被左端项控制，于是有

$$\|\boldsymbol{W}(t)\|_s\leqslant C_1^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{W}_0\|_s,\ \forall t\in[0,T]$$

因此，只要 $\|\nabla\bar{n}\|_s+\|\boldsymbol{W}_0\|_s\leqslant\frac{1}{2}\delta_0$，这里 δ_0 满足

$$C_1^{\frac{1}{2}}\delta_0<\min\left\{\frac{\min\{n_*+\|\bar{n}\|_{L^\infty},\theta_*\}}{2C_*},\frac{1}{C_2}\right\}$$

就可以保证

$$C_2(\|\nabla\bar{n}\|_s+\omega_T)<1$$

$$\|\nabla\bar{n}\|_s+\omega_T\leqslant\frac{\min\{n_*+\|\bar{n}\|_{L^\infty},\theta_*\}}{2C_*}$$

于是，解的整体存在性可由命题 2 给出的解的局部存在性结论结合标准的连续性方法获得. 证毕.

4　结论

1）借助非常数平衡解的小性以及对称子技巧，在初值为一个非常数平衡解的小摄动前提下，建立了 Cauchy 问题光滑解的一致先验估计.

2）利用对称双曲–抛物组光滑解的局部解存在性理论，并结合标准的连续性讨论方法，证明了该问题在一个非常数平衡解存在唯一渐近稳定的整体光滑解.

3）将非常数平衡解附近光滑解的整体存在性理论推广至粘性真实流体，并对粘性等离子体物理的发展提供必要理论依据.

参考文献：

[1] BESSE C, DEGOND P, DELUZET F, et al. A model hierarchy for ionospheric plasma modeling[J]. Math Models Methods Appl Sci, 2004, 32(14): 393-415.

[2] CHEN F. Introduction to plasma physics and controlled fusion[M]. New York: Plenum Press, 1984: 253-256.

[3] CHEN G Q, JEROME J W, WANG D H. Compressible Euler-Maxwell equations[J]. Transport Theory and Statistical Physics, 2000, 29(3/4/5): 311-331.

[4] PENG Y J, WANG S. Convergence of compressible Euler-Maxwell equations to incompressible Euler equations[J]. Comm Part Diff Equations, 2008, 9(33): 349-376.

[5] FENG Y H, WANG S, KAWASHIM S. Global existence and asymptotic decay of solutions to the non-isentropic Euler-Maxwell system[J]. Math Models Methods Appl Sci, 2014(24): 2851-2884.

[6] PENG Y J. Global existence and long-time behavior of smooth solutions of two-fluid Euler-Maxwell equations[J]. Ann I H Poincare Analyse NonLineaire, 2012, 8(29): 737-759.

[7] PENG Y J, WANG S, GU Q L. Relaxation limit and global existence of smooth solutions of compressible Euler-Maxwell equations[J]. SIAM J Math Anal, 2011, 43(2): 944-970.

[8] WANG S, FENG Y H, LI X. The asymptotic behavior of

globally smooth solutions of bipolar non-isentropic compressible Euler-Maxwell system for plasmas[J]. SIAM J Math Anal, 2012, 2(44): 3429-3457.

[9] WANG S, FENG Y H, LI X. The asymptotic behavior of globally smooth solutions of non-isentropic Euler-Maxwell equations for plasmas[J]. Appl Math Comput, 2014, 32(231): 299-306.

[10] DEGOND P, DELUZET F, SAVELIEF D. Numerical approximation of the Euler-Maxwell model in the quasineutral limit[J]. J Comput Phys, 2012, 9(231): 1917-1946.

[11] PENG Y J. Stability of steady state solutions for Euler-Maxwell equations[J]. J Math Pures Appl, 2015, 103(1): 39-67.

[12] KATO T. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems[J]. Arch Ration Mech Anal, 1975, 9(58): 181-205.

[13] MATSUMURA A, NISHIDA T. The initial value problem for the equation of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids[J]. Proc Japan Acad, Ser A, 1979, 3(55): 337-342.

[14] MATSUMURA A, NISHIDA T. The initial value problem for the equation of motion of viscous and heat-conductive gases[J]. J Math Kyoto Univ New York, 1980 (20): 67-104.

[15] KLAINERMAN S, MAJDA A. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids[J]. Comm Pure Appl Math, 1981, 3(34): 481-524.

[16] MAJDA A. Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables[M]. New York: Springer-Verlag, 1984: 55-56.

[17] NISHIDA T. Nonlinear hyperbolic equations and related topics in fluids dynamics[M]. Orsay: Universite Paris-Sud, 1978: 6-8.

[18] STEIN E M. Singular integrals and differentiability properties of functions [M]. Princeton: Princeton University Press, 1970: 102-106.

[19] LI X, WANG S, FENG Y H. Stability of non-constant equilibrium solutions for bipolar full compressible Navier-Stokes-Maxwell systems[J]. J Nonlinear Sci, 2018, 67(5): 2187-2215.

[20] LI X, WANG S, FENG Y H. Stability of nonconstant steady-state solutions for 2-fluid nonisentropic Euler-Poisson equations in semiconductor[J]. Math Meth Appl Sci, 2018, 41(10): 1-17.

[21] LI X, WANG S, FENG Y H. Stability of non-constant steady-state solutions for bipolar non-isentropic Euler-Maxwell equations with damping terms[J]. Z Angew Math Phys, 2016,67(5): 1-27.

[22] 王术, 冯跃红, 李新. 等离子体双极可压 Euler-Maxwell 方程组解的整体存在性[J]. 北京工业大学学报, 2013, 39(9): 1434-1440.
WANG S, FENG Y H, LI X. Global existence and decay of solutions for the bipolar Euler-Maxwell system in the torus[J] Journal of Beijing University of Technology, 2013, 39(9): 1434-1440. (in Chinese)

(责任编辑 张 蕾)