关于 g-框架的一些参数化不等式

赵　静, 李云章
(北京工业大学应用数理学院, 北京　100124)

摘　要: 运用算子理论方法得到了 Hilbert 空间中 g-框架的一些带参数的不等式. 在引入参数情况下, 建立了 g-框架及其正则对偶的一个不等式; 得到了 g-框架及其一般对偶的反向不等式. 所得结果推广了现有文献的结果.

关键词: g-框架; 正则对偶 g-框架; 对偶 g-框架
中图分类号: O 174.2　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 0254 - 0037(2018)09 - 1262 - 05
doi: 10.11936/bjutxb2017090009

Some Parameterized Inequalities for g-Frames

ZHAO Jing, LI Yunzhang
(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The notion of g-frame is a generalization of that of frame. It has interested many mathematicians in recent years. In this paper, using the operator theory method, we obtained some parameterized inequalities for g-frames in Hilbert spaces. In the case of introducing parameters, we established an inequality for a g-frame and its canonical dual. And we obtained a converse inequality for a g-frame and its alternate duals. These obtained results generalize the existing ones.

Key words: g-frame; canonical dual g-frame; dual g-frame

框架是标准正交基概念的推广, 它是 Duffin 等[1]在研究非调和 Fourier 级数时提出的, 小波分析的产生给框架理论的研究注入了新的活力. 目前, 框架理论已被广泛应用于滤波器理论、量子力学、信号处理等领域[2-4].

关于框架的概念有许多推广, Casazza 等于 2004 年在研究重构框架系统时基于对框架整体性与局部性的诠释引入了 Fusion 框架的概念. 之后, Fusion 框架的研究引起了不少学者的关注, 在理论和实际应用中取得了许多成果, 详见文献[5-8]. 2006 年, Sun[9]在一般 Hilbert 空间中引入了 g-框架的概念, 关于 g-框架的研究见文献[10-11]及其参考文献. "没有相位信息, 也能重构信号"是工程领域多年来一个悬而未决的猜想. 2006 年, Balan 等[12]通过刻画新的 Parseval 框架类证明了这一猜想的正确性. 笔者在处理信号的重构算法时, 发现了一个令人惊奇的结果:

设 $\{f_j\}_{j\in J}$ 是 Hilbert 空间 U 中的 Parseval 框架. 则对任意的 $K\subset J$ 与 $f\in U$, 有

$$\sum_{j\in K}|\langle f,f_j\rangle|^2+\left\|\sum_{j\in K^c}\langle f,f_j\rangle f_j\right\|^2=\sum_{j\in K^c}|\langle f,f_j\rangle|^2+\left\|\sum_{j\in K}\langle f,f_j\rangle f_j\right\|^2$$

随后关于框架等式与不等式的研究引起了许多学者的关注, 详见文献[13-17]及其参考文献. 令 $\{(V_j,w_j):j\in J\}$ 是 Hilbert 空间 V 中的 fusion 框架. 本文在此基础上运用算子理论得到了 Hilbert 空间中 g-框架及其对偶框架的一些新的不等式. 首先运用算子理论将文献[18]定理 3.1 关于一般 Hilbert 空间中 g-Parseval 框架的不等式进行推广, 在引入

收稿日期: 2017-09-05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271037)
作者简介: 赵　静(1991—), 女, 博士研究生, 主要从事小波分析方面的研究, E-mail: jingzhao@emails.bjut.edu.cn

参数情况下，建立了 g-框架及其正则对偶框架的不等式（见定理 3），特别地，当 $w_j=1(j\in J)$ 时可得文献[19]定理 2.3. 其次，运用算子理论得到了关于文献[20]定理 4.1 的反向不等式估计，补充并完善了关于 g-框架及其对偶框架的已有不等式（见定理 4），推广了文献[19]中定理 2.8 关于 fusion 框架及其对偶框架 $w_j=1(j\in J)$ 时不等式.

1　预备知识

设 U、V 是 2 个可分的 Hilbert 空间，其内积记作 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，范数记作 $\|\cdot\|$. $\{V_j:j\in J\}$ 是 V 的一列闭子空间，记 π_{V_j} 为 V 到 V_j 的正交投影，其中 J 是整数集 $\mathbb{Z}$ 的一个子集. 记 $L(U,V_j)(L(U))$ 为从 $U(U)$ 到 $V_j(U)$ 所有的有界线性算子组成的集合，记 I_U 为 U 中的恒等算子，对任意的 $T\in L(U,V_j)$，记 T^* 为其伴随算子.

定义 1[6]　设 $\{w_j:j\in J\}$ 是一列权重集，即对所有 $j\in J,w_j>0$，称 $\{(V_j,w_j):j\in J\}$ 是 V 关于 $\{w_j:j\in J\}$ 的 fusion 框架，如果存在 2 个正常数 A 和 B，对任意的 $f\in V$，有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{j\in J}w_j^2\|\pi_{V_j}f\|^2\leqslant B\|f\|^2$$

若 $A=B$，则称 $\{(V_j,w_j):j\in J\}$ 是 V 关于 $\{w_j:j\in J\}$ 的 A-紧 fusion 框架. 若 $A=B=1$，则称 $\{(V_j,w_j):j\in J\}$ 是 V 关于 $\{w_j:j\in J\}$ 的 Parseval fusion 框架.

定义 2[9]　一个序列 $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 称为 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-框架，如果存在 2 个正常数 A 和 B，对任意的 $f\in U$，有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{j\in J}\|\Lambda_jf\|^2\leqslant B\|f\|^2\qquad(1)$$

式中 A、B 分别为 g-框架的下、上界. 若式(1)只有右半不等式成立，则称序列 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 为 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-Bessel 序列. 若 $A=B$，则称 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 为 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 A-紧 g-框架. 若 $A=B=1$，则称 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 为 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-Parseval 框架.

定义 3[20]　设 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 和 $\{\Gamma_j:j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 2 个 g-框架，称 $\{\Gamma_j:j\in J\}$ 为 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 的对偶 g-框架，如果对任意的 $f\in U$，则

$$f=\sum_{j\in J}\Gamma_j^*\Lambda_jf$$

成立. 若 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的界为 A 和 B 的 g-框架，则相应的 g-框架算子 $S:U\to U$ 如下：

$$Sf=\sum_{j\in J}\Lambda_j^*\Lambda_jf,\ \forall f\in U$$

容易证明 S 是一个正的、自伴的、可逆的有界线性算子，且满足

$$\langle Sf,f\rangle=\left\langle\sum_{j\in J}\Lambda_j^*\Lambda_jf,f\right\rangle=\sum_{j\in J}\langle\Lambda_jf,\Lambda_jf\rangle=\sum_{j\in J}\|\Lambda_jf\|^2$$

因此，$A\|f\|^2\leqslant\langle Sf,f\rangle\leqslant B\|f\|^2$，且重构式子 $\forall f\in U$

$$f=SS^{-1}f=S^{-1}Sf=\sum_{j\in J}\Lambda_j^*\Lambda_jS^{-1}f=\sum_{j\in J}S^{-1}\Lambda_j^*\Lambda_jf$$

成立. 记 $\widetilde{\Lambda}_j=\Lambda_jS^{-1}$，则 $\widetilde{\Lambda}_j$ 是 U 关于 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 的界为 B^{-1} 和 A^{-1} 的 g-框架，并称 $\{\widetilde{\Lambda}_j:j\in J\}$ 是 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 的正则对偶 g-框架.

设 $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-Bessel 序列，$K\subset J$，$K^c=J\backslash K$. 分别定义 2 个有界线性算子 $S_K,S_{K^c}:U\to U$ 如下：

$$\forall f\in U$$

$$S_Kf=\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_jf,\ S_{K^c}f=\sum_{j\in K^c}\Lambda_j^*\Lambda_jf$$

下面给出 Hilbert 空间中正则对偶 g-框架的一些结论.

定理 1[21]　设 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-框架，则对任意的 $K\subset J$ 和 $f\in U$，有

$$\sum_{j\in K}\|\Lambda_jf\|^2+\sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_j(S_{K^c}f)\|^2=\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_jf\|^2+\sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_j(S_Kf)\|^2$$

定理 2[18]　设 $F=\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-Parseval 框架，对任意的 $K\subset J$，令

$$\nu_-(F,K)=\sup_{f\neq0}\frac{\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_jf\|^2+\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_jf\right\|^2}{\|f\|^2}$$

$$\nu_+(F,K)=\sup_{f\neq0}\frac{\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_jf\|^2+\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_jf\right\|^2}{\|f\|^2}$$

则

$$\frac{3}{4}\leqslant\nu_-(F,K)\leqslant v_+(F,K)\leqslant1$$

成立.

注意到，若 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 是一个 A-紧 g-框架，则 $\left\{\frac{1}{\sqrt{A}}\Lambda_j:j\in J\right\}$ 是 g-Parseval 框架. 由定理 2，可得下述推论，它是文献[21]定理 3.1 的一个推广.

推论 1　设 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 A-紧 g-框架，则对任意的 $K\subset J$ 和 $f\in U$，有

$$\frac{3A^2}{4}\|f\|^2\leqslant A\sum_{j\in K}\|\Lambda_jf\|^2+$$

$$\left\| \sum_{j\in K^c} \Lambda_j^* \Lambda_j f \right\|^2 \leqslant A^2 \|f\|^2$$

定理 3[22] 设$\{\Lambda_j:j\in J\}$是U关于$\{V_j:j\in J\}$的g-框架,$\{\Gamma_j:j\in J\}$是其对偶g-框架,$K\subset J$. 则对任意的$f\in U$, 有

$$\left\| \sum_{j\in K} \Gamma_j^* \Lambda_j f \right\|^2 + \mathrm{Re}\left(\sum_{j\in K^c} \langle \Lambda_j f, \Gamma_j f\rangle \right) =$$
$$\left\| \sum_{j\in K^c} \Gamma_j^* \Lambda_j f \right\|^2 + \mathrm{Re}\left(\sum_{j\in K} \langle \Lambda_j f, \Gamma_j f\rangle \right) \geqslant \frac{3}{4}\|f\|^2$$

2 主要结果及其证明

首先给出一些引理.

引理 1[19] 设P、$Q\in L(U)$是 2 个自伴算子,且$P+Q=I_U$,则对任意的$\lambda\in[0,1]$和$f\in U$, 有

$$\|Pf\|^2 + 2\lambda\langle Qf,f\rangle =$$
$$\|Qf\|^2 + 2(1-\lambda)\langle Pf,f\rangle + (2\lambda-1)\|f\|^2 \geqslant$$
$$(2\lambda-\lambda^2)\|f\|^2$$

类似于文献[18]定理 2.2 的证明,有下面引理. 为方便读者,本文给出证明.

引理 2 设$\{\Lambda_j:j\in J\}$是U关于$\{V_j:j\in J\}$的A-紧g-框架,S为$\{\Lambda_j:j\in J\}$的g-框架算子且$\{\widetilde{\Lambda}_j:j\in J\}$为$\{\Lambda_j:j\in J\}$的正则对偶$g$-框架, 则对任意的$K\subset J$和$f\in U$, 有

$$\sum_{j\in J} \|\widetilde{\Lambda}_j(S_K f)\|^2 = \frac{1}{A}\left\| \sum_{j\in K} \Lambda_j^* \Lambda_j f \right\|^2$$
$$\sum_{j\in J} \|\widetilde{\Lambda}_j(S_{K^c} f)\|^2 = \frac{1}{A}\left\| \sum_{j\in K^c} \Lambda_j^* \Lambda_j f \right\|^2$$

证明:由于$\{\Lambda_j:j\in J\}$是U关于$\{V_j:j\in J\}$的A-紧g-框架, 又$\widetilde{\Lambda}_j=\Lambda_j S^{-1}$,则对任意的$f\in U$,有$\sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_j(S_K f)\|^2=\frac{1}{A}\|S_K f\|^2$,再将$S_K f$的定义代入,因此有

$$\sum_{j\in J} \|\widetilde{\Lambda}_j(S_K f)\|^2 = \frac{1}{A}\left\| \sum_{j\in K} \Lambda_j^* \Lambda_j f \right\|^2$$

同理可得

$$\sum_{j\in J} \|\widetilde{\Lambda}_j(S_{K^c} f)\|^2 = \frac{1}{A}\left\| \sum_{j\in K^c} \Lambda_j^* \Lambda_j f \right\|^2$$

定理 4 设$\{\Lambda_j:j\in J\}$是U关于$\{V_j:j\in J\}$的g-框架,S为$\{\Lambda_j:j\in J\}$的g-框架算子且$\{\widetilde{\Lambda}_j:j\in J\}$为$\{\Lambda_j:j\in J\}$的正则对偶$g$-框架, 则对任意的$\lambda\in[0,1]$,$K\subset J$和$f\in U$,有

$$\langle Sf,f\rangle \geqslant \sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2 + \sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_j(S_{K^c} f)\|^2 =$$
$$\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2 + \sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_j(S_K f)\|^2 \geqslant$$
$$(2\lambda-\lambda^2)\langle S_K f,f\rangle + (1-\lambda^2)\langle S_{K^c} f,f\rangle \qquad (2)$$

证明:取$P=S^{-\frac{1}{2}}S_K S^{-\frac{1}{2}}$,$Q=S^{-\frac{1}{2}}S_{K^c}S^{-\frac{1}{2}}$,则$P$、$Q$满足引理 1 的条件. 由于$S_K+S_{K^c}=S$,则

$$S^{-\frac{1}{2}}S_K S^{-\frac{1}{2}} + S^{-\frac{1}{2}}S_{K^c}S^{-\frac{1}{2}} = I_U$$

以$S^{\frac{1}{2}}f$代替引理 1 中的f,首先证明式(2)的左半不等式. 由于

$$S_K S^{-1} S_{K^c} = (S-S_{K^c})S^{-1}(S-S_K) = S_{K^c}S^{-1}S_K$$

由此可得$PQ=QP$. 于是,

$$0\leqslant PQ = (I_U-Q)Q = Q-Q^2 =$$
$$S^{-\frac{1}{2}}(S_{K^c} - S_{K^c}S^{-1}S_{K^c})S^{-\frac{1}{2}}$$

从而,$S_{K^c}-S_{K^c}S^{-1}S_{K^c}\geqslant 0$. 因此,

$$\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2 + \sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_j(S_{K^c} f)\|^2 =$$
$$\langle S_K f,f\rangle + \langle S_{K^c} f, S^{-1}S_{K^c} f\rangle =$$
$$\langle S_K f,f\rangle + \langle S_{K^c}S^{-1}S_{K^c} f,f\rangle \leqslant$$
$$\langle S_K f,f\rangle + \langle S_{K^c} f,f\rangle = \langle Sf,f\rangle$$

因此,式(2)的左半不等式成立. 下证式(2)的右半不等式.

$$\|S^{-\frac{1}{2}}S_K f\|^2 =$$
$$\|S^{-\frac{1}{2}}S_{K^c} f\|^2 + 2(1-\lambda)\langle S^{-\frac{1}{2}}S_K f, S^{\frac{1}{2}}f\rangle +$$
$$(2\lambda-1)\|S^{\frac{1}{2}}f\|^2 - 2\lambda\langle S^{-\frac{1}{2}}S_{K^c} f, S^{\frac{1}{2}}f\rangle \geqslant$$
$$(2\lambda-\lambda^2)\|S^{\frac{1}{2}}f\|^2 - 2\lambda\langle S^{-\frac{1}{2}}S_{K^c} f, S^{\frac{1}{2}}f\rangle =$$
$$2\lambda(\langle Sf,f\rangle - \langle S_{K^c} f,f\rangle) - \lambda^2\langle Sf,f\rangle =$$
$$2\lambda\langle S_K f,f\rangle - \lambda^2\langle Sf,f\rangle$$

将上式代入定理 1, 便得

$$\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2 + \sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_j(S_{K^c} f)\|^2 =$$
$$\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2 + \sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_j(S_K f)\|^2 =$$
$$\langle S_{K^c} f,f\rangle + \langle SS^{-1}S_K f, S^{-1}S_K f\rangle =$$
$$\langle S_{K^c} f,f\rangle + \|S^{-\frac{1}{2}}S_K f\|^2 \geqslant$$
$$2\lambda\langle S_K f,f\rangle - \lambda^2\langle Sf,f\rangle + \langle S_{K^c} f,f\rangle =$$
$$(2\lambda-\lambda^2)\langle S_K f,f\rangle + (1-\lambda^2)\langle S_{K^c} f,f\rangle$$

故式(2)的右半不等式成立. 证毕.

注 1 取$U=V$,$\Lambda_j=\pi_{V_j}$,则由定理 4 可得文献[19]的定理 2.3 关于 fusion 框架不等式$w_j=1(j\in J)$时的结果.

注意到, 若$\{\Lambda_j:j\in J\}$是一个A-紧g-框架, 作为定理 4 和引理 2 的直接推论,有:

推论 2 设$\{\Lambda_j:j\in J\}$是U关于$\{V_j:j\in J\}$的A-紧g-框架, 则对任意的$K\subset J$和$f\in U$, 有

$$A^2\|f\|^2 \geqslant A\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2 + \left\| \sum_{j\in K^c} \Lambda_j^* \Lambda_j f \right\|^2 =$$

$$A\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2\geqslant$$
$$A(2\lambda-\lambda^2)\langle S_K f,f\rangle+A(1-\lambda^2)\langle S_{K^c}f,f\rangle$$

注 2　若令推论 2 中的 $\lambda=1/2$，则可得推论 1. 若又有 $A=1$，则可得定理 2.

定理 5　设 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-框架，$\{\Gamma_j:j\in J\}$ 是其对偶 g-框架，$\{\alpha_j:j\in J\}\in l^\infty(J)$. 定义算子

$$T_\alpha:U\to U,f\to\sum_{j\in J}\alpha_j\Gamma_j^*\Lambda_j f$$
$$T_{1-\alpha}:U\to U,f\to\sum_{j\in J}(1-\alpha_j)\Gamma_j^*\Lambda_j f$$

则对任意的 $f\in U$，有

$$\frac{3}{4}\|f\|^2\leqslant\left\|\sum_{j\in J}\alpha_j\Gamma_j^*\Lambda_j f\right\|^2+$$
$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j\in J}(1-\alpha_j)\langle\Lambda_j f,\Gamma_j f\rangle\right)=$$
$$\left\|\sum_{j\in J}(1-\alpha_j)\Gamma_j^*\Lambda_j f\right\|^2+\mathrm{Re}\left(\sum_{j\in J}\alpha_j\langle\Lambda_j f,\Gamma_j f\rangle\right)\leqslant$$
$$\frac{3+\|T_\alpha-T_{1-\alpha}\|^2}{4}\|f\|^2 \qquad (3)$$

证明：首先由文献[20]定理 4.1，式(3)的左半不等式已成立. 其次证明式(3)的右半不等式. 由 T_α 和 $T_{1-\alpha}$ 的定义，易证 $T_\alpha+T_{1-\alpha}=I$，则对任意的 $f\in U$，有

$$\left\|\sum_{j\in J}(1-\alpha_j)\Gamma_j^*\Lambda_j f\right\|^2+\mathrm{Re}\left(\sum_{j\in J}\alpha_j\langle\Lambda_j f,\Gamma_j f\rangle\right)=$$
$$\langle T_{1-\alpha}f,T_{1-\alpha}f\rangle+\mathrm{Re}\langle T_\alpha f,f\rangle=$$
$$\langle T_{1-\alpha}f,T_{1-\alpha}f\rangle+\langle f,f\rangle-\mathrm{Re}\langle T_{1-\alpha}f,f\rangle=$$
$$\langle f,f\rangle-\mathrm{Re}\langle T_{1-\alpha}f,T_\alpha f\rangle=$$
$$\frac{3}{4}\|f\|^2+\frac{1}{4}(\langle f,f\rangle-4\mathrm{Re}\langle T_{1-\alpha}f,T_\alpha f\rangle)=$$
$$\frac{3}{4}\|f\|^2+\frac{1}{4}(\langle f,f\rangle-2\langle T_{1-\alpha}f,T_\alpha f\rangle-2\langle T_\alpha f,T_{1-\alpha}f\rangle)=$$
$$\frac{3}{4}\|f\|^2+\frac{1}{4}(\langle(T_\alpha+T_{1-\alpha})f,(T_\alpha+T_{1-\alpha})f\rangle-$$
$$2\langle T_{1-\alpha}f,T_\alpha f\rangle-2\langle T_\alpha f,T_{1-\alpha}f\rangle)=$$
$$\frac{3}{4}\|f\|^2+\frac{1}{4}(\langle T_\alpha f,T_\alpha f\rangle-\langle T_{1-\alpha}f,T_\alpha f\rangle-$$
$$\langle T_\alpha f,T_{1-\alpha}f\rangle+\langle T_{1-\alpha}f,T_{1-\alpha}f\rangle)=$$
$$\frac{3}{4}\|f\|^2+\frac{1}{4}\langle(T_\alpha-T_{1-\alpha})f,(T_\alpha-T_{1-\alpha})f\rangle\leqslant$$
$$\frac{3}{4}\|f\|^2+\frac{1}{4}\|T_\alpha-T_{1-\alpha}\|^2\|f\|^2=$$
$$\frac{3+\|T_\alpha-T_{1-\alpha}\|^2}{4}\|f\|^2$$

因此，式(3)的右半不等式得证. 证毕.

推论 3　设 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-框架，$\{\Gamma_j:j\in J\}$ 是其对偶 g-框架，$K\subset J$. 定义算子

$$L_K:U\to U,f\to\sum_{j\in K}\Gamma_j^*\Lambda_j f$$
$$L_{K^c}:U\to U,f\to\sum_{j\in K^c}\Gamma_j^*\Lambda_j f$$

则对任意的 $f\in U$，有

$$\frac{3}{4}\|f\|^2\leqslant\left\|\sum_{j\in K}\Gamma_j^*\Lambda_j f\right\|^2+\mathrm{Re}\left(\sum_{j\in K^c}\langle\Lambda_j f,\Gamma_j f\rangle\right)\leqslant$$
$$\frac{3+\|L_K-L_{K^c}\|^2}{4}\|f\|^2$$

证明：在定理 5 中取 $\alpha_j=\begin{cases}1, & j\in K,\\ 0, & j\in K^c,\end{cases}$ 即可得此结论.

注 3　推论 3 建立了定理 3 的反向不等式.

注 4　取 $U=V,\Lambda_j=\pi_{V_j}$，由推论 3 可得文献[19]中定理 2.8 关于一般 Hilbert 空间中 fusion 框架不等式 $w_j=1(j\in J)$ 时的结果.

3　结论

1）运用算子理论在引入参数 λ 的基础上得到了 Hilbert 空间中关于正则对偶 g-框架的一些新的不等式，见定理 4.

2）运用算子理论得到了关于文献[20]定理 4.1 的反向不等式估计，见定理 5.

参考文献：

[1] DUFFIN R J, SCHAEFFER A C. A class of nonharmonic Fourier series [J]. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341-366.

[2] DAUBECHIES I, GROSSMANN A, MEYER Y. Painless nonorthogonal expansions [J]. J Math Phys, 1986, 27(5): 1271-1283.

[3] BÖLCSKEI H, HLAWATSCH F, FEICHTINER H G. Frame theoretic analysis of oversampled filter banks [J]. Transactions on Signal Processing, 1998, 46(12): 3256-3268.

[4] CHAN R H, RIEMENSCHNEIDER S D, SHEN L. Tight frame: an efficient way for high-resolution image reconstruction [J]. Appl Comput Harmon Anal, 2004, 17: 91-115.

[5] CASAZZA P G, KUTYNIOK G. Frames of subspaces [J]. Contemp Math, 2004, 345: 87-113.

[6] CASAZZA P G, KUTYNIOK G, LI S. Fusion frames and distributed processing [J]. Appl Comput Harmon Anal, 2008, 25(1): 114-132.

[7] BOUFOUNOS P, KUTYNIOK G, RAUHUT H. Sparse

recovery from combined fusion frame measurements [J]. IEEE Trans Tnform Theory, 2011, 57(6): 3864-3876.

[8] AYAZ U, DIRKSEN S, RAUHUT H. Uniform recovery of fusion frame structured sparse signals [J]. Appl Comput Harmon Anal, 2016, 41(2): 341-361.

[9] SUN W C. *G*-frames and *g*-Riesz bases [J]. J Math Anal Appl, 2006, 322(1): 437-452.

[10] ABDOLLAHPOUR M R, KHEDMATI Y. On some properties of continuous *g*-frames and Riesz-type continuous *g*-frames [J]. Indian J Pure Appl Math, 2017, 48 (1): 59-74.

[11] MIRZAEE A M, KHOSRAVI A. Duals and approximate duals of *g*-frames in Hilbert spaces [J]. J Linear Topol Algebra, 2015, 4(4): 259-265.

[12] BALAN R, CASAZZA P G, EDIDIN D. On signal reconstruction without noisy phase [J]. Appl Comput Harmon Anal, 2006, 20(3): 345-356.

[13] GĂVRUTA P. On some identities and inequalities for frames in Hilbert spaces [J]. J Math Anal Appl, 2006, 1: 469-478.

[14] GUO Q, LENG J, LI H. Some equalities and inequalities for fusion frames [J]. Springer Plus, 2016, 5: 121.

[15] LI J, ZHU Y. Some equalities and inequalities for *g*-Bessel sequences in Hilbert spaces [J]. Appl Math Letters, 2012, 25(11): 1601-1607.

[16] BALAN R, CASAZZA P G, EDIDIN D, et al. Decompositions of frames and a new frame identity[C]∥Wavlet Ⅺ. San Diego: SPIE, 2005: 379-388.

[17] BALAN R, CASAZZA P G, EDIDIN D, et al. A new identity for Parseval frames [J]. Proc Amer Math Soc, 2007, 135: 1007-1015.

[18] 肖祥春, 朱玉灿, 曾晓明. Hilbert 空间中 *g*-Parseval 框架的一些性质 [J]. 数学学报, 2008, 51(6): 1143-1150.

XIAO X C, ZHU Y C, ZENG X M. Some properties of *g*-Parserval frames in Hilbert spaces [J]. Acta Mathematica Sinica, 2008, 51 (6): 1143-1150. (in Chinese)

[19] XIANG Z Q. New types of inequalities for fusion frames [J]. J Math Inequal, 2017, 11(1): 291-299.

[20] 杨晓慧, 李登峰. G-框架及其对偶框架的一些等式和不等式 [J]. 数学学报, 2009, 52(5): 1033-1040.

YANG X H, LI D F. Some new equalities and inequalities for G-Frames and their dual frames [J]. Acta Math Sinica, 2009, 52(5): 1033-1040. (in Chinese)

[21] 李登峰, 孙文昌. 广义标架的一些等式和不等式 [J]. 数学年刊, 2008, 29(3): 301-308.

LI D F, SUN W C. Some equalities and inequalities for generalized frames [J]. Chin J Comtemp Math, 2008, 29(3): 301-308. (in Chinese)

[22] 朱玉灿, 肖祥春, 舒志彪. Hilbert 空间中的 *g*-Bessel 序列的一些等式与不等式 (II) [J]. 中国科学: 数学, 2013, 43(8): 825-834.

ZHU Y C, XIAO X C, SHU Z B. Some equalities and inequalities for *g*-Bessel sequences in Hilbert spaces (II) [J]. Sci Sin Math, 2013, 43 (8): 825-834. (in Chinese)

(责任编辑 张 蕾)