多体量子系统中 2 类特殊图的可分性

赵　慧, 赵静云
(北京工业大学应用数理学院, 北京　100124)

摘　要: 为了研究 2 类特殊密度矩阵的可分判据,通过研究 2 类特殊图的性质,给出了多体量子系统中这 2 类图的可分判据. 首先,推广了并图在多体量子系统中的概念,给出了在多体系统中图顶点的分层方式. 利用并图的概念、图顶点的分层、拉普拉斯矩阵的性质,证明了简单图的并图在多体量子系统下是可分的. 其次,通过部分对称图的概念和图顶点分层的方式构造了一类新图. 结合图的性质和图的分层,分析了新图及其拉普拉斯矩阵的性质,证明了新图在多体量子系统下代表可分态.

关键词: 并图; 拉普拉斯矩阵; 可分性
中图分类号: O 413　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 0254 - 0037(2018)08 - 1152 - 05
doi: 10. 11936/bjutxb2017060030

Separability of Two Classes of Special Graphs in Multipartite Quantum Systems

ZHAO Hui, ZHAO Jingyun
(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: Quantum entanglement is one of the most fascinating features of quantum theory and has numerous applications in quantum information processing and communication. Many unsolved problems in classical information theory can be solved by bipartite entanglement and multipartite entanglement. In this paper, the separable criterion of classes of density matrices was studied. The separable criterion of two classes of graphs was presented by studying two classes of special graphs in multipartite systems. Firstly, the concept of union graph was generalized. The separability of union graphs of simple graph in multipartite quantum systems was proven by the method of graph's layer and the property of Laplacian matrices. Secondly, a class of graph was constructed by the concept of partially symmetric and graph's layer. Combining the properties of graph and graph's layer, this class of graph and the properties of the relevant Laplacian matrices were analyzed. The research shows that the classes of graph represent a separable state in multipartite quantum systems.

Key words: union graph; Laplacian matrix; separability

量子纠缠理论是量子信息领域的重要研究内容,纠缠态在信息处理和量子通信中起着重要的作用,利用两体和多体量子纠缠可以实现很多经典信息理论中无法完成的任务,例如量子隐形传态、量子克隆、量子密码等[1-3]. 文献[4]介绍了两体系统混合态可分的必要判据,一个可分态的密度矩阵部分转置之后特征值非负,这称为部分转置正(positive partial transpose,PPT)判据. 这为判断态的纠缠性提

收稿日期: 2017-06-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11101017); 北京市青年拔尖人才培育计划资助项目(CITTCD201404067)
作者简介: 赵　慧(1973—), 女, 副教授, 主要从事量子信息方面的研究, E-mail: zhaohui@ bjut. edu. cn

供了重要依据. 图理论是数学知识体系中一个重要的分支,在许多方面得到了应用,如最优化、网路系统等领域. 将图理论和量子信息理论相结合,有助于对量子态可分问题进行研究和分析. 文献[5]介绍了关于图的拉普拉斯矩阵,在一般情况下归一化后的拉普拉斯矩阵被认为是量子纠缠理论研究中的密度矩阵. 文献[6-7]介绍了在三体量子系统下,图的拉普拉斯矩阵的可分性质. 文献[8]指出在图的同构意义下,图的可分性是不变的. 文献[9]通过对星图加边的方法,分析和研究了星图密度矩阵的谱分解相关问题. 文献[10]利用加权有向图研究一类用图的拉普拉斯矩阵定义的量子态. 文献[11]介绍了两体量子系统下的并图的可分性,并通过定义一种新的图算子得到了一类新图,证明了在一定条件下新图代表两体量子系统下一种可分态. 本文将文献[11]的结论推广到多体量子系统,给出了在多体量子系统中图顶点的分层方法,推广了图理论中并图的定义,证明了并图在多体量子系统中是可分的,并且通过推广的图算子构造了多体量子系统下的一类新图,再结合图的分层方法,给出了新图在多体量子系统中的可分判据.

1　基础知识

定义 1　图 G 是指一个二元有序组$(V(G),E(G))$. 其中 $V(G)=\{1,2,\cdots,n\}$ 是非空且有限集,称为顶点集;$E(G)=\{(i,j):i,j\in V(G)\}$是顶点集 $V(G)$ 中的无序的元素偶对组成的集合,称为边集,其中的元素称为边. 图的顶点重合为一点的边(i,i)称为环. 这里把不含环和重复边的图叫做简单图.

定义 2　设 G 是由 n 个顶点构成的图,则图 G 的邻接矩阵是一个 n 阶矩阵,记为 $\boldsymbol{A}(G)$,其第 i 行 j 列元素为

$$[\boldsymbol{A}(G)]_{i,j}=\begin{cases}1, & (i,j)\in E(G)\\ 0, & (i,j)\notin E(G)\end{cases} \tag{1}$$

定义 3　$V(G)$是图 G 的非空顶点集,v_i 在图 G 的度数是指 $V(G)$ 中与 v_i 相邻接的顶点的数目,记为 $d_G(v_i)$. $\boldsymbol{D}(G)$是图 G 的度数矩阵,它是以 $d_G(v_i)$ 为对角元素的对角矩阵.

定义 4　图 G 的密度矩阵定义为

$$\boldsymbol{\rho}_q(G)=\frac{\boldsymbol{Q}(G)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}(G))};\boldsymbol{\rho}_l(G)=\frac{\boldsymbol{L}(G)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G))}$$

式中:$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}(G))$表示矩阵 $\boldsymbol{Q}(G)$的迹,即矩阵主对角线元素之和. $\boldsymbol{L}(G)$和 $\boldsymbol{Q}(G)$是图 G 的拉普拉斯矩阵,其中 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$,$\boldsymbol{Q}(G)=\boldsymbol{D}(G)+\boldsymbol{A}(G)$.

定义 5　多体量子系统中,密度矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 如果能写成形式

$$\boldsymbol{\rho}=\sum_i q_i\boldsymbol{\rho}_i^1\otimes\boldsymbol{\rho}_i^2\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\rho}_i^n \tag{2}$$

则 $\boldsymbol{\rho}$ 在 $H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_n$ 中是可分的. 其中,$\boldsymbol{\rho}_i^k$ 是 H_k 上的密度矩阵;$\sum_i q_i=1,(q_i\geqslant 0)$;$H_k(k=1,2,\cdots,n)$是Hilbert 空间.

定义 6[11]　图 G 和图 H 的并图定义为:$G\cup H=(V(G)\cup V(H),E(G)\cup E(H))$. 设图 G 是一个带有 q 个顶点的图,$V(G)=\{1,2,\cdots,q\}$,则 $mG=G\cup G\cup\cdots\cup G$($m$ 个图 G 的并).

2　并图的可分性

为了更好地分析并图的可分性,对图 G 的顶点进行分层. 首先给出三体量子系统图的分层方式.

设三体量子系统是 $m\times n\times q$ 维的,对应的简单图 G 带有 mnq 个顶点,即 $V(G)$中有 mnq 个元素,$V(G)=\{1,2,\cdots,mnq\}$. 令 $v_i\in V(G)$,$(i=\{1,2,\cdots,mnq\})$. 先将 $V(G)$中的顶点分成 m 层,每层含有 nq 个顶点,得到层为:$C_1,C_2,\cdots,C_i,\cdots,C_m$. 邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$为

$$\boldsymbol{A}(G)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{1,1} & \boldsymbol{A}_{1,2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1,m-1} & \boldsymbol{A}_{1,m}\\ \boldsymbol{A}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2,m-1} & \boldsymbol{A}_{2,m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{m-1,1} & \boldsymbol{A}_{m-1,2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{m-1,m-1} & \boldsymbol{A}_{m-1,m}\\ \boldsymbol{A}_{m,1} & \boldsymbol{A}_{m,2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{m,m-1} & \boldsymbol{A}_{m,m}\end{bmatrix} \tag{3}$$

再将每层 nq 个顶点分成 n 层,每层含有 q 个顶点. 最终得到的层为:$C_{1,1},C_{1,2},\cdots,C_{i,j},\cdots,C_{m,n}$. 依据分层可以得到:$v_{i,j,k}=nq(i-1)+q(j-1)+k$,各类的层表示为

$$C_i=\{v_{i,1,1},\cdots,v_{i,1,q},\cdots,v_{i,n,1},\cdots,v_{i,n,q}\}$$
$$C_{i,j}=\{v_{i,j,1},v_{i,j,2},\cdots,v_{i,j,q}\}$$

邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$中的子块 $\boldsymbol{A}_{i,k}$表示为

$$\boldsymbol{A}_{i,k}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{i1,k1} & \boldsymbol{A}_{i1,k2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{i1,kn}\\ \boldsymbol{A}_{i2,k1} & \boldsymbol{A}_{i2,k2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{i2,kn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{in,k1} & \boldsymbol{A}_{in,k2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{in,kn}\end{bmatrix} \tag{4}$$

按照这种分层方式,可将邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$表示为

$$\begin{bmatrix} A_{11,11} & A_{11,12} & \cdots & A_{11,1n} & \cdots & A_{11,m1} & \cdots & A_{11,mn} \\ A_{12,11} & A_{12,12} & \cdots & A_{12,1n} & \cdots & A_{12,m1} & \cdots & A_{12,mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n,11} & A_{1n,12} & \cdots & A_{1n,1n} & \cdots & A_{1n,m1} & \cdots & A_{1n,mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1,11} & A_{m1,12} & \cdots & A_{m1,1n} & \cdots & A_{m1,m1} & \cdots & A_{m1,mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{mn,11} & A_{mn,12} & \cdots & A_{mn,1n} & \cdots & A_{mn,m1} & \cdots & A_{mn,mn} \end{bmatrix}$$

下面给出多体量子系统中图的分层方式.

设多体系统分别为 $H_1, H_2, \cdots, H_n$,其中 H_i 的维数是 $N_i(i=1,2,\cdots,n)$. 图 G 是有 $N_1N_2\cdots N_n$ 个顶点的简单图,即 $V(G)=\{1,2,\cdots,N_1N_2\cdots N_n\}$. 先将 $V(G)$ 中的顶点依次分成 N_1 层,每层 $N_2\cdots N_n$ 个顶点,得到的层为 $C_1, C_2, \cdots, C_{i_1}, \cdots, C_{N_1}$,邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1,1} & \boldsymbol{A}_{1,2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1,N_1-1} & \boldsymbol{A}_{1,N_1} \\ \boldsymbol{A}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2,N_1-1} & \boldsymbol{A}_{2,N_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{N_1-1,1} & \boldsymbol{A}_{N_1-1,2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{N_1-1,N_1-1} & \boldsymbol{A}_{N_1-1,N_1} \\ \boldsymbol{A}_{N_1,1} & \boldsymbol{A}_{N_1,2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{N_1,N_1-1} & \boldsymbol{A}_{N_1,N_1} \end{bmatrix}$$

再将每层中的 $N_2N_3\cdots N_n$ 个顶点依次分成 N_2 层,每层 $N_3N_4\cdots N_n$ 个顶点,此时得到层为 $C_{1,1}, C_{1,2}, \cdots, C_{i_1,i_2}, \cdots, C_{N_1,N_2}$,邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 中的子块 $\boldsymbol{A}_{i_1,j_1}$ 表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{i_11,j_11} & \boldsymbol{A}_{i_11,j_12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{i_11,j_1N_2} \\ \boldsymbol{A}_{i_12,j_11} & \boldsymbol{A}_{i_12,j_12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{i_12,j_1N_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{i_1N_2,j_11} & \boldsymbol{A}_{i_1N_2,j_12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{i_1N_2,j_1N_2} \end{bmatrix}$$

按此方法,依次将子块分割,直至进行 $(n-1)$ 次分层,最终得到 $N_1N_2\cdots N_{n-1}$ 个层,其中有 $v_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n}=(i_1-1)N_2\cdots N_n+(i_2-1)N_3\cdots N_n+\cdots+(i_{n-1}-1)N_n+i_n(i_1=1,2,\cdots,N_1;i_2=1,2,\cdots,N_2;\cdots;i_{n-1}=1,2,\cdots,N_{n-1})$. $C_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}=\{v_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},1}, v_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},2}, \cdots, v_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},N_n}\}$. 第 $(n-1)$ 次分层后,将 $(n-2)$ 次分层得到的邻接矩阵中的子块 $\boldsymbol{A}_{i_1i_2\cdots i_{n-2},j_1j_2\cdots j_{n-2}}$ 表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{i_1i_2\cdots i_{n-2}1,j_1j_2\cdots j_{n-2}1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{i_1i_2\cdots i_{n-2}1,j_1j_2\cdots j_{n-2}N_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{i_1i_2\cdots i_{n-2}N_{n-1},j_1j_2\cdots j_{n-2}1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{i_1i_2\cdots i_{n-2}N_{n-1},j_1j_2\cdots j_{n-2}N_{n-1}} \end{bmatrix}$$

文献[11]给出了两体量子系统中图的部分对称定义,本课题组将其推广到多体量子系统,定义如下:

定义 7 设图 G 是有 $N_1N_2\cdots N_n$ 个顶点的简单图,将图的顶点分层后,当 $(v_{i_1,i_2,\cdots,i_n}, v_{j_1,j_2,\cdots,j_n})\in E(G)$ 时,也有 $(v_{j_1,i_2,\cdots,i_n}, v_{i_1,j_2,\cdots,j_n})\in E(G)$,称图 G 是部分对称图.

为了讨论多体系统中并图的可分性,根据多体系统图的分层方式推广并图的定义如下:

定义 8 设 G 是带有 N_n 个顶点的简单图,则 $N_1G=G\cup G\cup\cdots\cup G$($N_1$ 个图 G 的并). 令 $N_1N_2G=N_1(N_2G)=N_1G\cup N_1G\cup\cdots\cup N_1G$($N_2$ 个图 N_1G 的并); $N_1N_2\cdots N_{n-1}G=N_1(N_2(\cdots N_{n-1}(G)))=G\cup\cdots\cup G$,($N_1N_2\cdots N_{n-1}$ 个图 G 的并).

根据多体系统在图顶点的分层方式,对并图 $N_1N_2\cdots N_{n-1}G$ 进行分层,可依次得到 N_1 个 C_{i_1} 类的层;N_1N_2 个 C_{i_1,i_2} 类的层,最后得到了 $N_1N_2\cdots N_{n-1}$ 个 $C_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}$ 类的层.

接下来分析 $N_1N_2\cdots N_{n-1}G$ 的可分性. 根据并图 $N_1N_2\cdots N_{n-1}G$ 的定义,可以将它的邻接矩阵和度数矩阵表示成形式

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)= \\ \operatorname{diag}\{\boldsymbol{A}(N_2\cdots N_{n-1}G),\cdots,\boldsymbol{A}(N_2\cdots N_{n-1}G)\}= \\ \boldsymbol{I}_{N_1}\otimes\boldsymbol{A}(N_2\cdots N_{n-1}G)=\cdots= \\ \boldsymbol{I}_{N_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{I}_{N_{n-1}}\otimes\boldsymbol{A}(G) \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{D}(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)= \\ \operatorname{diag}\{\boldsymbol{D}(N_2\cdots N_{n-1}G),\cdots,\boldsymbol{D}(N_2\cdots N_{n-1}G)\}= \\ \boldsymbol{I}_{N_1}\otimes\boldsymbol{D}(N_2\cdots N_{n-1}G)=\cdots= \\ \boldsymbol{I}_{N_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{I}_{N_{n-1}}\otimes\boldsymbol{D}(G) \end{gathered} \tag{6}$$

式中 diag 表示对角矩阵. 再根据拉普拉斯矩阵的定义,可以得到

$$\begin{gathered} \boldsymbol{L}(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)= \\ \operatorname{diag}\{\boldsymbol{L}(N_2\cdots N_{n-1}G),\cdots,\boldsymbol{L}(N_2\cdots N_{n-1}G)\}= \\ \boldsymbol{I}_{N_1}\otimes\boldsymbol{L}(N_2\cdots N_{n-1}G)=\cdots= \\ \boldsymbol{I}_{N_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{I}_{N_{n-1}}\otimes\boldsymbol{L}(G) \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{Q}(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)= \\ \operatorname{diag}\{\boldsymbol{Q}(N_2\cdots N_{n-1}G),\cdots,\boldsymbol{Q}(N_2\cdots N_{n-1}G)\}= \\ \boldsymbol{I}_{N_1}\otimes\boldsymbol{Q}(N_2\cdots N_{n-1}G)=\cdots= \\ \boldsymbol{I}_{N_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{I}_{N_{n-1}}\otimes\boldsymbol{Q}(G) \end{gathered} \tag{8}$$

根据等式(5)~(8)可以得到如下定理.

定理 1 设图 G 是一个有 N_n 个顶点的简单图,对于并图 $N_1N_2\cdots N_{n-1}G$,$\boldsymbol{\rho}_l(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)$ 代表一个 $N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 维的可分态.

证明:由以上各式得

$$\boldsymbol{\rho}_l(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)=$$

$$\frac{\boldsymbol{L}(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(N_1N_2\cdots N_{n-1}G))}=\frac{\boldsymbol{I}_{N_1}\otimes\boldsymbol{I}_{N_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{I}_{N_{n-1}}\otimes\boldsymbol{L}(G)}{N_1N_2\cdots N_{n-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G))}=\frac{\boldsymbol{I}_{N_1}}{N_1}\otimes\frac{\boldsymbol{I}_{N_2}}{N_2}\otimes\cdots\otimes\frac{\boldsymbol{I}_{N_{n-1}}}{N_{n-1}}\otimes\frac{\boldsymbol{L}(G)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G))}$$

因为$\frac{\boldsymbol{I}_{N_1}}{N_1},\frac{\boldsymbol{I}_{N_2}}{N_2},\cdots,\frac{\boldsymbol{I}_{N_{n-1}}}{N_{n-1}},\frac{\boldsymbol{L}(G)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G))}$都是密度矩阵，所以$\boldsymbol{\rho}_l(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)$是可分的.

3　图 $G\diamondsuit H$ 的可分性

首先，给出三体量子系统 $H_1\otimes H_2\otimes H_3$ 中图 $G\diamondsuit H$的定义，设 H_1、H_2、H_3 的维数分别为 m、n、q.

定义 9　设三体量子系统是 $m\times n\times q$ 维的，图 G 是一个带有 q 个顶点的简单图. 设图 H 是一个带有 mnq 个顶点的简单图，将其顶点分层后，满足以下 5 个条件：

1）对于所有层 $C_i(i=1,2,\cdots,m)$同层顶点间没有边；

2）对于任意层 C_i 和 C_j，或者层之间顶点没有边相连，或者 $\boldsymbol{A}_{i,k}=\boldsymbol{A}_{j,l}(i,j,k,l=1,2,\cdots,m;i\neq k$ 并且 $j\neq l)$；

3）对于任意层 $C_{i,s}$和 $C_{j,u}$，或者层之间顶点没有边相连，或者 $\boldsymbol{A}_{is,kt}=\boldsymbol{A}_{ju,lv}(i,j,k,l=1,2,\cdots,m;s,t,u,v=1,2,\cdots,n;i\neq k$ 或 $s\neq t$ 且 $j\neq l$ 或 $u\neq v)$；

4）所有顶点间的度数相同；

5）$\boldsymbol{\rho}_l(H)$在 $H_1\otimes H_2\otimes H_3$ 系统中是可分的.

将图 H 的每个层 $C_{i,s}$中的顶点和边全部用图 G 代替，得到的图记为 $G\diamondsuit H$，其中 $V(G\diamondsuit H)=V(H)$.

下面给出图 $G\diamondsuit H$ 的性质.

引理 1　$\boldsymbol{A}(G\diamondsuit H)=\boldsymbol{A}(mnG)+\boldsymbol{A}(H)$.

证明：因为图 H 满足同层顶点无边相连，所以 $\boldsymbol{A}(H)$对角线上的分块矩阵都是零矩阵，而 $\boldsymbol{A}(mnG)$除对角线上的分块矩阵外全部是零矩阵，并且对角线上的分块矩阵全是 $\boldsymbol{A}(G)$. 通过图 mnG 和图 $G\diamondsuit H$的定义可以得到

$$\boldsymbol{A}(G\diamondsuit H)=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A}(G)+\boldsymbol{A}(H)=\boldsymbol{A}(mnG)+\boldsymbol{A}(H)$$

引理 2　$\boldsymbol{D}(G\diamondsuit H)=\boldsymbol{D}(mnG)+\boldsymbol{D}(H)$.

证明：任取 $V(G\diamondsuit H)$中的点 $v_{i,j,k}$，如果$(v_{i,j,k},v_{s,u,t})\in E(G\diamondsuit H)$，则$(v_{i,j,k},v_{s,u,t})\in E(mnG)$或 $E(H)$，所以 $d_{G\diamondsuit H}(v_{i,j,k})\leqslant d_{mnG}(v_{i,j,k})+d_H(v_{i,j,k})$.

如果$(v_{i,j,k},v_{s,u,t})\in E(H)$，则$(v_{i,j,k},v_{s,u,t})\notin E(mnG)$并且$(v_{i,j,k},v_{s,u,t})\in E(G\diamondsuit H)$. 如果$(v_{i,j,k},v_{s,u,t})\in E(mnG)$，则$(v_{i,j,k},v_{s,u,t})\notin E(H)$并且$(v_{i,j,k},v_{s,u,t})\in E(G\diamondsuit H)$. 因此，$d_{G\diamondsuit H}(v_{i,j,k})\geqslant d_{mnG}(v_{i,j,k})+d_H(v_{i,j,k})$.

所以有 $d_{G\diamondsuit H}(v_{i,j,k})=d_{mnG}(v_{i,j,k})+d_H(v_{i,j,k})$.

引理 3　$\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H)=\boldsymbol{L}(mnG)+\boldsymbol{L}(H)$

$$\boldsymbol{Q}(G\diamondsuit H)=\boldsymbol{Q}(mnG)+\boldsymbol{Q}(H)$$

证明：由拉普拉斯矩阵的定义和引理 1 ~2 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H)&=\boldsymbol{D}(G\diamondsuit H)-\boldsymbol{A}(G\diamondsuit H)=\\ &\boldsymbol{D}(mnG)+\boldsymbol{D}(H)-\boldsymbol{A}(mnG)-\boldsymbol{A}(H)=\\ &[\boldsymbol{D}(mnG)-\boldsymbol{A}(mnG)]+[\boldsymbol{D}(H)-\boldsymbol{A}(H)]=\\ &\boldsymbol{L}(mnG)+\boldsymbol{L}(H)\end{aligned}$$

类似地可得：$\boldsymbol{Q}(G\diamondsuit H)=\boldsymbol{Q}(mnG)+\boldsymbol{Q}(H)$.

根据定理 1 以及引理 1 ~3 可得到图 $G\diamondsuit H$ 的可分性.

定理 2　图 $G\diamondsuit H$ 代表一个 $m\times n\times q$ 维三体量子系统的可分态，即$\boldsymbol{\rho}_l(G\diamondsuit H)$是可分的.

证明：由图 $G\diamondsuit H$ 的定义及对应拉普拉斯矩阵的性质可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_l(G\diamondsuit H)&=\frac{\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}=\frac{\boldsymbol{L}(mnG)+\boldsymbol{L}(H)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}=\\ &\frac{\boldsymbol{L}(mnG)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(mnG))}\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(mnG))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}+\\ &\frac{\boldsymbol{L}(H)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(H))}\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(H))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}=\\ &\boldsymbol{\rho}_l(mnG)\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(mnG))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}+\boldsymbol{\rho}_l(H)\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(H))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}\end{aligned}$$

由定理 1 可知$\boldsymbol{\rho}_l(mnG)$是可分的，且$\boldsymbol{\rho}_l(mnG)=\frac{\boldsymbol{I}_m}{m}\otimes\frac{\boldsymbol{I}_n}{n}\otimes\frac{\boldsymbol{L}(G)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G))}$（$\boldsymbol{I}_m$、$\boldsymbol{I}_n$ 分别是 m、n 阶单位矩阵）；由图 $G\diamondsuit H$ 的定义可知$\boldsymbol{\rho}_l(H)$是可分的，所以$\boldsymbol{\rho}_l(H)=\sum_i q_i\boldsymbol{\rho}_i^1\otimes\boldsymbol{\rho}_i^2\otimes\boldsymbol{\rho}_i^3$. 则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\rho}_l(G\diamondsuit H)=\\ &\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(mnG))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}\left(\frac{\boldsymbol{I}_m}{m}\otimes\frac{\boldsymbol{I}_n}{n}\otimes\frac{\boldsymbol{L}(G)}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G))}\right)+\\ &\sum_i\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(H))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}q_i\boldsymbol{\rho}_i^1\otimes\boldsymbol{\rho}_i^2\otimes\boldsymbol{\rho}_i^3\end{aligned}$$

而且，各项的系数和为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(mnG))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}+\sum_i\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(H))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}q_i=\\ &\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(mnG))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}+\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(H))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}\sum_i q_i=\\ &\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(mnG))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}+\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(H))}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H))}\cdot 1=1\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{\rho}_l(G\diamondsuit H)$是可分的.

类似地，给出多体量子系统中图 $G\diamondsuit H$ 的定义，

并分析其性质和可分性.

定义 10 设多体量子系统的 n 个子系统为 H_1, H_2, $\cdots$, H_n, 其中 H_i 的维数为 $N_i(i=1,2,\cdots,n)$. 图 G 是一个带有 N_n 个顶点的简单图. 图 H 是一个带有 $N_1N_2\cdots N_n$ 个顶点的部分图,将其顶点分层后,满足以下 6 个条件:

1) 对于所有层 $C_{i_1}(i=1,2,\cdots,N_1)$, 同层顶点间没有边;

2) 对于任意层 C_{i_1} 和 C_{j_1}, 或者层之间顶点没有边相连,或者 $\boldsymbol{A}_{i_1,j_1}=\boldsymbol{A}_{k_1,l_1}(i_1,j_1,k_1,l_1=1,2,\cdots,N_1$; $i_1\neq j_1$ 并且 $k_1\neq l_1)$;

3) 对于任意层 C_{i_1,i_2} 和 C_{j_1,j_2}, 或者层之间顶点没有边相连,或者 $\boldsymbol{A}_{i_1i_2,j_1j_2}=\boldsymbol{A}_{k_1k_2,l_1l_2}(i_1,j_1,k_1,l_1=1,2,\cdots,N_1;i_2,j_2,k_2,l_2=1,2,\cdots,N_2;i_1\neq j_1$ 或 $i_2\neq j_2$ 并且 $k_1\neq l_1$ 或 $k_2\neq l_2)$;

4) 依次地每次分层产生的层都满足类似的条件,最终对所有的层 $C_{i_1,\cdots,i_{n-1}}$ 和 $C_{j_1,\cdots,j_{n-1}}$, 或者 2 层间无边,或者 $\boldsymbol{A}_{i_1\cdots i_{n-1},j_1\cdots j_{n-1}}=\boldsymbol{A}_{k_1\cdots k_{n-1},l_1\cdots l_{n-1}}(i_p,j_p,k_p,l_p=1,\cdots,N_p,p=1,\cdots,n-1$; $\exists h_1,h_2\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $i_{h_1}\neq j_{h_1}$ 且 $k_{h_2}\neq k_{h_2})$;

5) 所有顶点间的度数相同;

6) $\boldsymbol{\rho}_l(H)$ 在 $H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_n$ 中是可分的.

将图 H 的每个层 $C_{i_1,\cdots,i_{n-1}}$ 中的顶点和边用图 G 代替,得到一个多体系统下的新图,记为 $G\diamondsuit H$, 其中 $V(G\diamondsuit H)=V(H)$.

利用以上三体量子系统中的研究方法,可得如下结论.

引理 4 $\boldsymbol{A}(G\diamondsuit H)=\boldsymbol{A}(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)+\boldsymbol{A}(H)$

引理 5 $\boldsymbol{D}(G\diamondsuit H)=\boldsymbol{D}(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)+\boldsymbol{D}(H)$

引理 6 $\boldsymbol{L}(G\diamondsuit H)=\boldsymbol{L}(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)+\boldsymbol{L}(H)$

$\boldsymbol{Q}(G\diamondsuit H)=\boldsymbol{Q}(N_1N_2\cdots N_{n-1}G)+\boldsymbol{Q}(H)$

定理 3 图 $G\diamondsuit H$ 代表一个 $N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 维多体可分态,即 $\boldsymbol{\rho}_l(G\diamondsuit H)$ 是可分的.

4 结论

1) 在多体量子系统中,设图 G 是带有 N_n 个顶点的简单图,则并图 $N_1N_2\cdots N_{n-1}G$ 是代表维数为 $N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 的可分态.

2) 在维数为 $m\times n\times q$ 的三体量子系统中,图 G 是带有 q 个顶点的简单图,图 H 是带有 mnq 个顶点的部分对称图且满足一些条件,则图 $G\diamondsuit H$ 是可分态.

3) 在维数为 $N_1\times N_2\times\cdots\times N_n$ 多体系统中,图 G 是带有 N_n 个顶点的简单图,图 H 是带有 $N_1N_2\cdots N_n$ 个顶点的部分对称图且满足一些条件,则图 $G\diamondsuit H$ 代表一个可分态.

参考文献:

[1] EKERT A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem [J]. Physical Review Letters, 1991, 67(6): 661-663.

[2] BENNETT C H, WIESNER S J. Communication via one and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states [J]. Physical Review Letters, 1992, 69 (20): 2881-2884.

[3] BENNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. Physical Review Letters, 1993, 70(13): 1895-1899.

[4] PERES A. Sparability criterion for density matrices [J]. Physical Review Letters, 1996, 77(8): 1413-1415.

[5] BRAUNSTEIN S L, GHOSH S, SEVERINI S. The Laplacian of a graph as a density matrix: a basic combinatorial approach to separability of mixed states [J]. Annals of Combinatorics, 2006, 10(3): 291-317.

[6] WU C W. Multipartite separability of Laplacian matrices of graphs [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2009, 16(1): 61-72.

[7] WU C W. Graphs whose normalized Laplacian matrices are separable as density matrices in quantum mechanics [J]. Discrete Math, 2016, 339(4): 1377-1381.

[8] WU C W. On graphs whose Laplacian matrix's multipartite separability is invariant under graph isomorphism [J]. Discrete Math, 2010, 310(21): 2811-2814.

[9] LI J Q, CHEN X B, YANG Y X. Quantum state representation based on combinatorial Laplacian matrix of star-relevant graph [J]. Quantum Information Processing, 2015, 14(12): 4691-4713.

[10] BIBHAS A, SUBHASHISH B, SATYABRATA A, et al. Laplacian matrices of weighted digraphs represented as quantum states [J]. Quantum Information Processing, 2017, 16(3): 1-22.

[11] DUTTA S, ADHIKARI B, BANERJEE S, et al. Bipartite separability and non-local quantum operations on graphs [J]. Physical Review A, 2016, 94: 012306.

(责任编辑 张 蕾)