

# 重载行星齿轮传动等强度优化设计方法

魏 静, 杨攀武, 秦大同, 张爱强, 白培鑫  
(重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400044)

**摘要:** 针对多功率分流的行星齿轮传动中, 齿轮强度和寿命差异较大的问题, 提出了以体积和各级齿轮强度安全系数差最小为目标的行星齿轮等强度优化设计方法, 优化模型从动力学角度出发计算了系统的均载系数和动载系数, 考虑各齿轮应力循环次数差异对许用应力的影响, 并基于美国齿轮制造者协会标准计算了各级齿轮强度的安全系数. 以五路功率分流人字齿星型轮为例计算了齿轮参数, 算例表明: 以传动系统体积最小和齿轮安全系数相差最小为目标的优化设计方法得到的齿轮参数可以使各级齿轮的强度接近或一致, 并能够有效减小传动机构的体积, 所得到的设计参数更加合理, 能够提高系统的可靠性以及节约制造成本.

**关键词:** 齿轮传动; 重载齿轮; 行星轮系; 等强度; 动载系数

中图分类号: V 231; TH 132.4

文献标志码: A

文章编号: 0254-0037(2018)07-0979-08

doi: 10.11936/bjtxb2017050047

## Equal Strength Optimal Design Method in Heavy-load Planetary Gear Transmission

WEI Jing, YANG Panwu, QIN Datong, ZHANG Aiqiang, BAI Peixin  
(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** To tackle the great difference in strength and longevity of gears in the multi-power split planetary gear transmission, an equal strength optimal design method was proposed to assure the minimum volume and safety coefficient difference in the planetary gear transmission system. The load sharing coefficient and dynamic load coefficient of the system was calculated based on the dynamics, the influence of stress cycles on the allowable stress was considered, and the safety coefficient for the strength of gears was calculated based on the AGMA standard. The five power split star gears system was taken as an example to calculate the gear parameters. Result shows that the gear parameters obtained through the optimum design method aiming at the minimum volumes and safety coefficient difference can make the strength of the gear close and effectively reduce the volume of transmission system, which can make the design parameters more reasonable and improve the reliability of the system as well as reduce manufacturing cost.

**Key words:** gear transmission; heavy-load gear; planetary gear transmission system; equal strength; dynamic load coefficient

相比于普通平行轴的齿轮传动系统, 行星齿轮传动具有结构紧凑、传动比大、传动效率高、运动平

稳等优点, 广泛应用于高铁、船舶、航空、航天等领域<sup>[1]</sup>, 但轮系中各齿轮的直径不同, 以及均载和应

收稿日期: 2017-05-23

基金项目: 国家“973”计划资助项目(2014CB046304); 2016 工信部民机专项资助项目(MJZ-2016-D-33)

作者简介: 魏 静(1978—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事传动机械学、齿轮系统动力学方面的研究, E-mail: weijing\_slmt@163.com

力循环差异等问题会导致齿轮的承载能力不一样,个别齿轮的过早失效会导致整个传动系统的故障,这对于互换性较差的航空齿轮箱而言,极大地降低了整个传动装置的可靠性<sup>[2]</sup>,为了提高齿轮箱的可靠性,必须考虑齿轮传动的等强度设计原则,尽可能缩小各个齿轮强度上的差异,充分发挥各个齿轮的潜能。

关于渐开线圆柱齿轮等强度的计算方法,国内外学者进行了多方面的研究.早在100多年前,Lewis就提出了应用材料力学法和抛物线等强度梁理论的齿轮弯曲强度计算方法<sup>[3]</sup>,Hertz提出了2个圆柱体的接触应力计算公式<sup>[4]</sup>,奠定了齿轮接触应力计算的理论基础.在Lewis和Hertz的基础上,引进相关修正系数,国际标准化组织(ISO)与美国齿轮制造者协会(American Gear Manufacturers Association, AGMA)就圆柱齿轮的强度计算也出台了各自的标准<sup>[5-7]</sup>,此外在20世纪末,我国也就此颁布了新的国家标准 GB/T3481—1997<sup>[8-10]</sup>.针对ISO与AGMA标准之间的差异,Kawalec等<sup>[11]</sup>、周长江等<sup>[12]</sup>、吴昌林等<sup>[13]</sup>进行了理论分析,并与有限元计算结果进行了对比,对比结果表明,2种标准的计算结果均偏保守;Cahala<sup>[14]</sup>运用统计学原理得到ISO标准到AGMA标准的转换公式.除这些公式之外,很多学者也提出了自己的计算方法. Shuting<sup>[15]</sup>采用有限元方法计算了齿轮的传动误差和刚度,分析了高低重合度齿轮的齿根弯曲应力和接触应力的分布规律;李发家等<sup>[16]</sup>提出了高重合度外啮合齿轮齿根弯曲应力计算方法,并获得了齿根危险截面弯曲应力的计算公式。

基于齿轮的等强度设计公式,很多文献提出了相关的优化设计理论和方法. Luchko等<sup>[17]</sup>、杜海霞<sup>[18]</sup>针对圆柱齿轮减速器,以最小体积为目标进行了优化设计;秦大同等<sup>[19]</sup>以风电齿轮箱为研究对象,基于等强度和可靠性对多路功率分流齿轮传动参数进行了优化设计;王慧等<sup>[20]</sup>以各级齿轮强度安全系数差最小为目标,对功率二分支齿轮传动系统进行优化;焦万铭等<sup>[21]</sup>以汽车变速器行星齿轮机构为对象进行等强度优化设计,并利用仿真和实验计算了齿轮的疲劳应力,验证了优化方法的可行性.但是以上这些研究大多是针对单对齿轮,在计算多功率分流的行星齿轮传动时,往往忽略掉各路功率分流之间载荷分配的不均匀性,以及齿轮多级啮合中应力循环不同所引起的寿命差异,此外齿轮等强度计算标准中的动载荷系数也仅仅依靠查阅经验图

表查询得到,导致结果与实际情况差距较大。

本文从动力学角度出发,计算了行星轮系的均载系数和动载系数,考虑应力循环对各路功率分流齿轮寿命的影响,并基于标准计算了行星轮系的齿轮强度安全系数,以各级齿轮强度安全系数差和传动系统体积最小为目标函数,建立了行星轮系等强度多目标优化设计数学模型,经过优化所得到的齿轮参数,可以在保证齿轮强度前提下有效减小传动机构的体积,并提高系统的可靠性,降低制造安装和维护成本。

## 1 行星轮系等强度设计数学模型

### 1.1 行星轮系传动原理

行星轮系一般由中心轮(太阳轮和内齿圈)、行星轮、转臂等构成,行星轮均匀地分布在中心轮周围共同承担载荷,按照转臂是否固定可以分为NGW行星轮系和星型轮系.传动简图如图1所示, $T_{in}$ 为输入扭矩, $T_{out}$ 为输出扭矩.功率经过太阳轮输入,分流到各个行星轮(或星轮),最后汇聚到内齿圈上.各级齿轮的齿形可以是直齿、斜齿或者人字齿等,考虑到直齿作为斜齿的特殊形式,人字齿由两侧对称的斜齿构成,且相比斜齿轮具有更高的承载能力,为了使本文的研究方法不失一般性,以人字齿行星轮系进行研究。

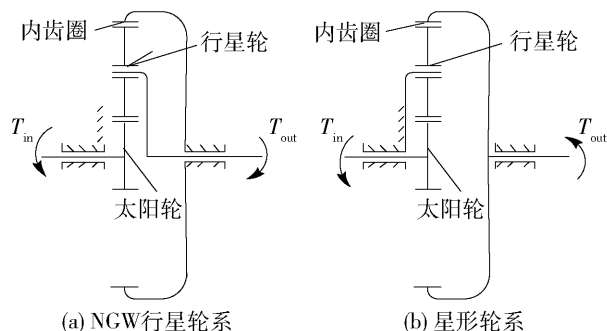


图1 行星系传动简图

Fig. 1 Transmission diagram of the planetary gear transmission system

### 1.2 设计变量和目标函数

在齿轮传动优化设计中,通常将齿轮的齿数、模数、齿宽等作为主要的设计变量,行星轮系中太阳轮、齿圈、行星轮(或星轮)的齿数分别为 $z_s$ 、 $z_p$ 、 $z_r$ ,法向模数和压力角分别为 $m_n$ 、 $\alpha_n$ ,螺旋角为 $\beta$ ,人字齿单侧齿宽为 $b$ ,则设计变量可以表示为

$$\mathbf{X} = (z_s, z_r, z_p, m_n, \alpha_n, \beta, b)^T \quad (1)$$

本文在计算行星轮系各级齿轮强度时,将行星

轮系等效为一对内外啮合的平行轴斜齿轮, 基于 ANSI/AGMA 2101-D04 标准, 并引入行星轮系载荷不均匀性系数  $\Omega$ , 分别计算行星轮系各齿轮的接触疲劳强度和弯曲疲劳强度安全系数. 以各个齿轮的安全系数差和传动系统体积最小为目标函数进行优化, 使各个齿轮的强度相同或接近的同时降低整个传动系统的体积.

定义接触强度的计算安全系数为  $S_{\text{HAGMA}}$ , 计算公式为:  $S_{\text{HAGMA}} = \sigma_{\text{HPAGMA}} / \sigma_{\text{H}}$ . 式中:  $\sigma_{\text{HPAGMA}}$  为许用接触应力;  $\sigma_{\text{H}}$  为计算接触应力. 其计算公式分别为

$$\begin{cases} \sigma_{\text{HPAGMA}} = \frac{\sigma_{\text{HP}} Z_{\text{N}} Z_{\text{W}}}{S_{\text{H}} Y_{\theta} Y_{\text{Z}}} \\ \sigma_{\text{H}} = Z_{\text{E}} \sqrt{\Omega F_{\text{t}} K_{\text{o}} K_{\text{v}} K_{\text{s}} \frac{K_{\text{H}} Z_{\text{R}}}{d_{\text{w1}} b Z_{\text{I}}}} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $Z_{\text{N}}$  为接触强度计算的应力循环系数;  $Z_{\text{W}}$  为硬度比系数;  $S_{\text{H}}$  为接触应力最小安全系数;  $Y_{\theta}$  为温度系数;  $Y_{\text{Z}}$  为可靠度系数;  $Z_{\text{E}}$  为弹性系数;  $F_{\text{t}}$  为节圆上的名义切向力;  $K_{\text{o}}$  为过载系数;  $K_{\text{v}}$  为动载系数;  $K_{\text{s}}$  为尺寸系数;  $K_{\text{H}}$  为载荷分布系数;  $Z_{\text{R}}$  为表面状况系数;  $d_{\text{w1}}$  为小齿轮节圆直径;  $Z_{\text{I}}$  为接触强度几何系数.

针对接触强度安全系数差最小得到目标函数为

$$f_1(\mathbf{X}) = \max \{ S_{\text{HSAGMA}}, S_{\text{HPAGMA}}, S_{\text{HRAGMA}} \} - \min \{ S_{\text{HSAGMA}}, S_{\text{HPAGMA}}, S_{\text{HRAGMA}} \} \quad (3)$$

定义弯曲强度的计算安全系数为  $S_{\text{FAGMA}}$ , 计算公式为:  $S_{\text{FAGMA}} = \sigma_{\text{FPAGMA}} / \sigma_{\text{F}}$ . 式中:  $\sigma_{\text{FPAGMA}}$  为许用弯曲应力;  $\sigma_{\text{F}}$  为计算弯曲应力. 其计算公式分别为

$$\begin{cases} \sigma_{\text{FPAGMA}} = \frac{\sigma_{\text{FP}} Y_{\text{N}}}{S_{\text{F}} Y_{\theta} Y_{\text{Z}}} \\ \sigma_{\text{F}} = \Omega F_{\text{t}} K_{\text{o}} K_{\text{v}} K_{\text{s}} \frac{1}{b m_{\text{t}}} \frac{K_{\text{H}} K_{\text{B}}}{Y_{\text{J}}} \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $Y_{\text{N}}$  为应力循环系数;  $S_{\text{F}}$  为弯曲应力最小安全系数;  $K_{\text{B}}$  为轮缘厚度系数;  $m_{\text{t}}$  为端面模数;  $Y_{\text{J}}$  为弯曲强度几何系数.

针对弯曲强度安全系数差最小得到目标函数为

$$f_2(\mathbf{X}) = \max \{ S_{\text{FSAGMA}}, S_{\text{FPAGMA}}, S_{\text{FRAGMA}} \} - \min \{ S_{\text{FSAGMA}}, S_{\text{FPAGMA}}, S_{\text{FRAGMA}} \} \quad (5)$$

考虑整个系统体积最小, 得到的目标函数为

$$f_3(\mathbf{X}) = \frac{\pi}{2} b (d_{\text{s}}^2 - d_{\text{si}}^2 + N d_{\text{p}}^2 - N d_{\text{pi}}^2 + d_{\text{to}}^2 - d_{\text{r}}^2) \quad (6)$$

式中:  $d$  为各齿轮分段圆直径;  $d_{\text{i}}$ 、 $d_{\text{o}}$  分别为齿轮轮

毂的内外径.

采用线性加权法, 根据各个子目标函数的重要程度给予相应的加权系数<sup>[22]</sup>, 将多目标函数转化为统一目标函数, 为了消除各个子目标函数之间的相对值差异较大而引起的结果不合理性, 在构造综合评价函数时, 将各个子目标除以各自的最优解进行归一化处理, 评价函数公式为

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{3} \frac{f_1(\mathbf{X})}{f_1^*(\mathbf{X})} + \frac{1}{3} \frac{f_2(\mathbf{X})}{f_2^*(\mathbf{X})} + \frac{1}{3} \frac{f_3(\mathbf{X})}{f_3^*(\mathbf{X})} \quad (7)$$

式中子目标函数最优解为  $f_i^*(\mathbf{X}) = \min f_i(\mathbf{X})$ .

### 1.3 约束条件

1) 为了保证行星轮系的安装, 需要满足一定的配齿约束条件.

同心条件: 太阳轮、行星轮 (或星轮) 和内齿圈的中心距必须相等, 即

$$z_{\text{r}} = z_{\text{s}} + 2z_{\text{p}} \quad (8)$$

封闭条件: 行星轮 (或星轮) 均布安装在太阳轮和内齿圈之间, 即

$$(z_{\text{r}} + z_{\text{s}}) / 5 = C \quad (9)$$

式中  $C$  为自然数.

邻接条件: 行星轮 (或星轮) 间不互相碰撞和干涉, 即

$$(z_{\text{s}} + z_{\text{p}}) \sin(180/5) > z_{\text{p}} + 2h_{\text{a}}^* \quad (10)$$

式中  $h_{\text{a}}^*$  为齿顶高系数.

2) 对重载齿轮传动来说, 在所要求的寿命期内, 根据 HB/Z84.1—84 所推荐的在失效率为 1% 时, 最小接触疲劳安全系数  $S_{\text{Hmin}} = 1.0$ , 最小弯曲疲劳安全系数  $S_{\text{Fmin}} = 1.1$ , 即

$$\begin{cases} \min(S_{\text{HSAGMA}}, S_{\text{HPAGMA}}, S_{\text{HRAGMA}}) \geq 1.0 \\ \min(S_{\text{FSAGMA}}, S_{\text{FPAGMA}}, S_{\text{FRAGMA}}) \geq 1.1 \end{cases} \quad (11)$$

3) 根据齿轮箱的使用场合, 按照设计经验对齿轮模数做出限制, 根据输出构件的工况对总传动比提出限制, 另外为了节约制造安装成本, 尤其是针对航空航天产品, 对传动机构的总质量都是有严格限制的, 即

$$\begin{cases} m_{\text{min}} \leq m_{\text{n}} \leq m_{\text{max}} & \text{模数限制} \\ i_{\text{min}} \leq z_{\text{r}} / z_{\text{s}} \leq i_{\text{max}} & \text{(星型轮系)} \\ i_{\text{min}} \leq 1 + z_{\text{r}} / z_{\text{s}} \leq i_{\text{max}} & \text{(NGW 行星轮系)} \\ W_{\text{min}} = \rho f_3(\mathbf{X}) \leq W_{\text{max}} & \text{质量限制} \end{cases} \quad (12)$$

4) 受到加工和安装条件的限制, 以及为了提高齿轮的强度, 对人字齿的螺旋角、压力角、宽径比等参数还提出限制, 即

$$\begin{cases} \beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max} & \text{螺旋角限制} \\ \alpha_{\min} \leq \alpha_n \leq \alpha_{\max} & \text{压力角限制} \\ \varphi_{\min} \leq b/d_s \leq \varphi_{\max} & \text{宽径比限制} \\ \varepsilon_\alpha \geq 1.2 & \text{重合度限制} \\ z/\cos^3 \beta \geq 2/\sin^2 \alpha_n & \text{不根切限制} \end{cases} \quad (13)$$

## 2 动力学载荷系数

### 2.1 系统动力学模型

动力学建模中,在保证实际模型与理论模型的几何参数和动力学属性相似的前提下,将太阳轮轴、行星轮轴(或星轮轴)、齿圈等构件均简化为简单的轴段单元,采用修正的 Euler-Bernoulli 梁单元<sup>[23]</sup>建立系统的动力学方程,如图 2 所示,梁单元在单元局部坐标系(OXYZ)下的广义坐标为

$$\mathbf{X}_J = \{x_j, y_j, z_j, \theta_{x_j}, \theta_{y_j}, \theta_{z_j}, x_{j+1}, y_{j+1}, z_{j+1}, \theta_{x_{j+1}}, \theta_{y_{j+1}}, \theta_{z_{j+1}}\}^T \quad (14)$$

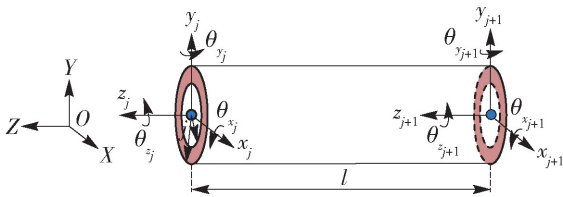


图 2 Euler-Bernoulli 梁单元

Fig. 2 Euler-Bernoulli beam element

轴段单元的动力学微分方程可以表示为

$$\mathbf{M}_J \ddot{\mathbf{X}}_J + \mathbf{C}_J \dot{\mathbf{X}}_J + \mathbf{K}_J \mathbf{X}_J = \mathbf{F}_J \quad (15)$$

式中: $\mathbf{M}_J$ 为第  $J$  段梁单元在单元坐标系下的质量矩阵; $\mathbf{K}_J$ 为第  $J$  段梁单元在单元坐标系下的刚度矩阵; $\mathbf{C}_J$ 为第  $J$  段梁单元在单元坐标系下的阻尼矩阵; $\mathbf{F}_J$ 为第  $J$  段梁单元在单元坐标系下的负载矩阵<sup>[24]</sup>.

以人字齿星型轮系为例,各齿轮之间的啮合关系和轴承的支撑采用等效的弹簧刚度和阻尼等效,建立的各齿轮轴段耦合动力学模型如图 3 所示,图 3 中 OXYZ 为全局固定坐标系,  $oxyz$  为各齿轮轴的坐标系,其中各齿轮节点轴承支撑刚度和阻尼分别用符号表示为  $k_{ij}, c_{ij}$  ( $i = s, p, r, j = x, y, z$ ), 内外啮合齿轮副之间的啮合刚度、阻尼、当量啮合误差分别用符号表示为  $k_{ij}, c_{ij}, e_{ij}$  ( $i = sp, rp, j = 1, 2, \dots, N$ ).

为简化计算,在齿轮系统动力学分析时忽略掉轴承刚度的时变性,取其平均值,仅保留主要刚度项后,滚动轴承的刚度矩阵  $\mathbf{K}_b$  可以表达为

$$\mathbf{K}_b = \text{diag}(k_{xx}, k_{yy}, k_{zz}, 0, 0, 0) \quad (16)$$

借助 Maatar 等<sup>[24]</sup>基于齿轮副瞬时总接触线长

度的研究得到斜齿轮(人字齿单边)的啮合刚度

$$k(t) = k_0 L(\tau) \quad (17)$$

式中: $\tau = t/T_m$ ,  $T_m$  为啮合周期; $k_0$  为单位接触线长度的齿轮平均啮合刚度,按照 GB3480—1997 中的公式进行计算; $L(\tau)$  为齿轮副瞬时总接触线长度.

关于啮合阻尼和支撑阻尼,采用经典阻尼(Rayleigh 阻尼)公式计算,即

$$c = \alpha m + \beta k \quad (18)$$

式中  $\alpha, \beta$  分别为质量比例系数和刚度比例系数.

考虑安装误差和制造误差引起的当量啮合误差,取各个齿轮制造误差、安装误差的幅值分别为  $E, A$ , 初始相位角为  $\beta, \gamma$ , 齿轮的角速度为  $\omega$ , 则各齿轮的误差引起的当量啮合误差公式如下.

1) 外啮合各齿轮误差所引起当量啮合误差为

$$\begin{cases} eE_{sm} = E_s \sin(\omega_s t + \beta_s + \alpha_s - \psi_m) \\ eA_{sm} = A_s \sin(\gamma_s + \alpha_s - \psi_m) \\ eE_{psm} = E_p \sin(-\omega_m t + \beta_m + \alpha_s) \\ eA_{psm} = A_p \sin(\gamma_m + \alpha_s) \end{cases} \quad (19)$$

2) 内啮合各齿轮误差所引起当量啮合误差为

$$\begin{cases} eE_{rm} = E_r \times \sin(-\omega_r t - \beta_r + \alpha_r + \psi_m) \\ eA_{rm} = A_r \sin(-\gamma_r + \alpha_r + \psi_m) \\ eE_{rpm} = E_p \sin(-\omega_m t - \beta_m + \alpha_r) \\ eA_{rpm} = A_p \sin(-\gamma_m + \alpha_r) \end{cases} \quad (20)$$

3) 考虑各种误差之后的综合外内啮合误差为

$$\begin{cases} e_{spm} = eE_{sm} + eA_{sm} + eE_{psm} + eA_{psm} \\ e_{rpm} = eE_{rm} + eA_{rm} + eE_{rpm} + eA_{rpm} \end{cases} \quad (21)$$

图 3 中各齿轮的基圆半径为  $r$ , 压力角为  $\alpha$ , 螺旋角为  $\beta$ , 第  $m$  个星轮位置角为  $\psi_m$ , 定义外啮合的啮合角为:  $\psi_{sm} = \psi_m - \alpha_s$ , 内啮合的啮合角为  $\psi_{rm} = \psi_m + \alpha_r$ , 齿轮节点的振动位移在啮合线方向的相对位移为  $\delta$ , 由于人字齿左右两侧对称, 以左侧为例, 则在啮合线方向的相对位移可以表达为  $\delta = \mathbf{V} \mathbf{q}$ , 式中  $\mathbf{q}$  为各齿轮啮合节点的振动位移,  $\mathbf{V}$  为啮合节点的耦合向量, 外内啮合的耦合向量为

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{sm}^L = [ -\sin \psi_{sm} \cos \beta, \cos \psi_{sm} \cos \beta, \sin \beta, \\ r_s \sin \psi_{sm} \sin \beta, -r_s \cos \psi_{sm} \sin \beta, r_s \cos \beta \\ \sin \psi_{sm} \cos \beta, -\cos \psi_{sm} \cos \beta, -\sin \beta, \\ r_m \sin \psi_{sm} \sin \beta, -r_m \cos \psi_{sm} \sin \beta, r_m \cos \beta ] \\ \mathbf{V}_{rm}^L = [ \sin \psi_{rm} \cos \beta, -\cos \psi_{rm} \cos \beta, \sin \beta, \\ r_m \sin \psi_{rm} \sin \beta, -r_m \cos \psi_{rm} \sin \beta, -r_m \cos \beta \\ -\sin \psi_{rm} \cos \beta, \cos \psi_{rm} \cos \beta, -\sin \beta, \\ -r_r \sin \psi_{rm} \sin \beta, r_r \cos \psi_{rm} \sin \beta, r_r \cos \beta ] \end{cases} \quad (22)$$

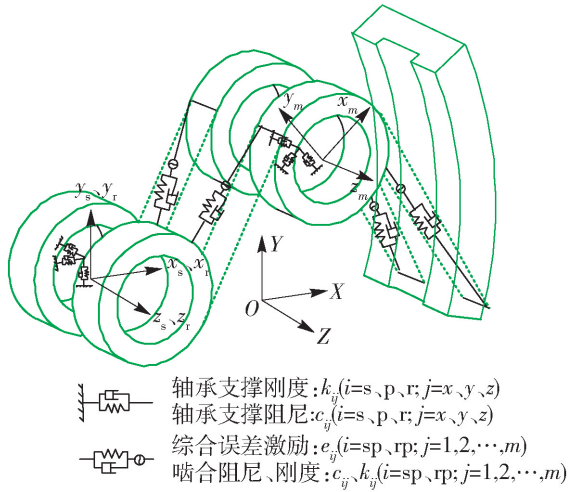


图3 人字齿星型轮系等效力学模型

Fig. 3 Equivalent mechanical model for the herringbone star gear transmission system

根据啮合向量,各齿轮轴段之间耦合的刚度矩阵和阻尼矩阵可以分别表达为

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}(t) \mathbf{V}^T \mathbf{V}, \mathbf{C} = \mathbf{c}(t) \mathbf{V}^T \mathbf{V}$$

根据系统的离散化程度,将星型轮系划分为轴系单元、啮合单元、支撑单元等,各个单元之间有序地连接起来<sup>[25]</sup>,形成星型轮系整体节点有限元模型,如图4所示,图中  $OXYZ$  为系统的总体坐标系,系统一共被划分为  $6N + 14$  个自由度,  $N$  为系统星轮个数。

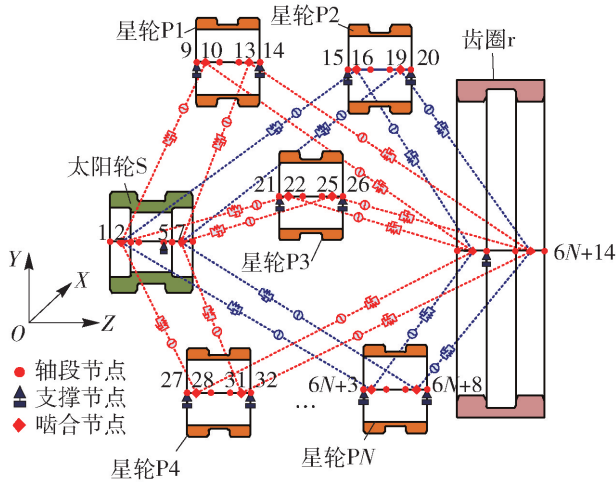


图4 人字齿星型轮系整体节点有限元模型

Fig. 4 Overall node finite element model of the herringbone star gear transmission system

将轴系单元的质量、阻尼、刚度、负载矩阵,按照有限单元法的规则联立并组装形成系统的整体动力学方程为

$$\mathbf{M}_T \ddot{\mathbf{X}}_T + \mathbf{C}_T \dot{\mathbf{X}}_T + \mathbf{K}_T \mathbf{X}_T = \mathbf{F}_T \quad (23)$$

式中:  $\mathbf{M}_T, \mathbf{K}_T, \mathbf{C}_T$  分别为系统总体质量、刚度和阻尼矩阵;  $\mathbf{X}_T$  为系统轴系单元各节点的位移向量;  $\mathbf{F}_T = [\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n]^T$  为系统的负载向量。

通过求解系统的整体动力学方程,得到齿轮传动系统的动态响应,从而计算系统的内外啮合力,传动系统轮齿啮合力由弹性力和阻尼力组成,以  $F_{sm}$  与  $F_{vm}$  分别表示行星轮系的外、内啮合力,则

$$\begin{cases} F_{sm} = k_{sm}(t) \delta_{sm} + c_{sm}(t) \dot{\delta}_{sm} \\ F_{vm} = k_{vm}(t) \delta_{vm} + c_{vm}(t) \dot{\delta}_{vm} \end{cases} \quad (24)$$

考虑人字齿左右两侧的振动位移、当量啮合误差,等效外、内啮合线位移分别为

$$\begin{cases} \delta_{sm} = \mathbf{V}_{sm}^L \mathbf{q}_{sm}^L + \mathbf{V}_{sm}^R \mathbf{q}_{sm}^R + e_{sm}(t) \\ \delta_{vm} = \mathbf{V}_{vm}^L \mathbf{q}_{vm}^L + \mathbf{V}_{vm}^R \mathbf{q}_{vm}^R + e_{vm}(t) \end{cases} \quad (25)$$

### 2.2 均载系数

行星齿轮传动系统的均载系数定义为:同一时刻行星传动外(内)啮合副的最大啮合力与平均啮合力的比值.某一时间节点上参与外、内啮合的星轮的均载系数分别为  $B_{sm}$  和  $B_{vm}$ ,且

$$B_{sm} = NF_{sm} / \sum_{m=1}^N F_{sm}, B_{vm} = NF_{vm} / \sum_{m=1}^N F_{vm} \quad (26)$$

把各对外、内啮合人字齿各时间点星轮均载系数的最大值作为该时刻外、内啮合均载系数,则外、内啮合动态均载系数  $\Omega_{sm}, \Omega_{vm}$  分别为

$$\Omega_{sm}(t) = \max B_{sm}, \Omega_{vm}(t) = \max B_{vm} \quad (27)$$

### 2.3 动载系数

动载系数是考虑齿轮制造精度、运转速度等对轮齿内部附加动载荷影响的系数,用来衡量系统一对啮合齿轮副在运动过程中所受到的最大载荷.本文通过分析行星轮系动力学特性,考虑误差和时变啮合刚度等内部激励的影响,计算动载系数的值,定义行星轮系外、内啮合的动载系数为

$$\begin{cases} K_{vsm} = F_{sm} / \bar{F}_{sn} \\ K_{vsm} = F_{vm} / \bar{F}_{vm} \end{cases} \quad (28)$$

式中  $\bar{F}_{sn}, \bar{F}_{vm}$  分别为理论计算的外、内啮合法向载荷。

## 3 优化设计案例

### 3.1 设计要求

某型号齿轮涡扇发动机 (geared turbofan, GTF) 风扇驱动齿轮箱的结构如图5所示,功率经过太阳轮输入,分流到5个星轮上,最后汇聚到内齿轮上,并采用人字齿轮传动以消除轴向力.根据设计要求:系统的传递功率  $P$  为 20 MW,太阳轮输入转速

$n_s$  为 7 500 r/min,工作寿命为 30 000 h. 太阳轮和星轮的材料采用第 2 代齿轮钢 16Cr3NiWMo-VNbE,热处理方式采用渗碳淬火,其疲劳极限为:  $\sigma_{FP1} = 625$  MPa,  $\sigma_{HP1} = 1 550$  MPa;内齿圈采用 34CrNiMo6,热处理方式采用调制,其疲劳极限为:  $\sigma_{FP2} = 850$  MPa,  $\sigma_{HP2} = 340$  MPa;且齿轮箱的传动比范围为 2.5 ~ 4.0,齿轮法向模数为 3 ~ 5、螺旋角为  $16^\circ \sim 40^\circ$ 、法向压力角为  $20^\circ \sim 30^\circ$ 、太阳轮齿宽系数为 0.9 ~ 1.4,传动机构总质量不得超过 250 kg.

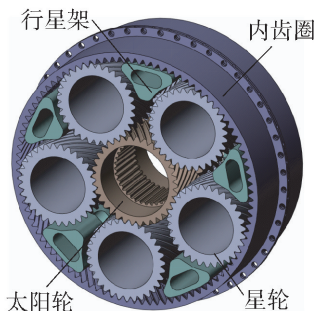


图 5 GTF 风扇驱动齿轮箱传动结构

Fig. 5 Transmission structure of fan drive gear box for the GTF engine

### 3.2 许用应力

不同于单对齿轮的啮合,在基于 AGMA 标准计算星型轮系各齿轮许用应力时,由于轮系中太阳轮和内齿圈同时与多个星轮啮合,轮齿的应力循环次数不相等,考虑应力循环次数对疲劳极限的影响,按照图 6 查询应力循环系数,齿轮的应力循环次数为

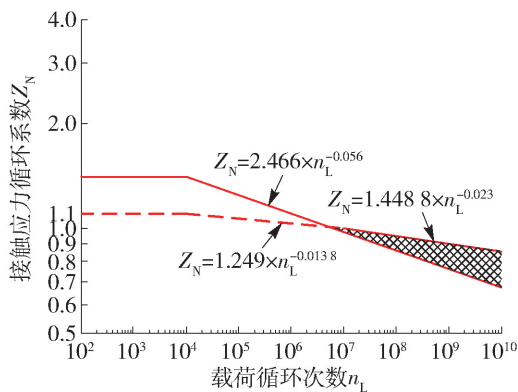
$$n_L = 60njL_H \quad (29)$$

式中: $n$  为齿轮的转速, r/min;  $j$  为齿轮转一圈单个齿面的啮合次数,且  $j_s = j_r = 5, j_p = 1; L_H$  为工作寿命, h.

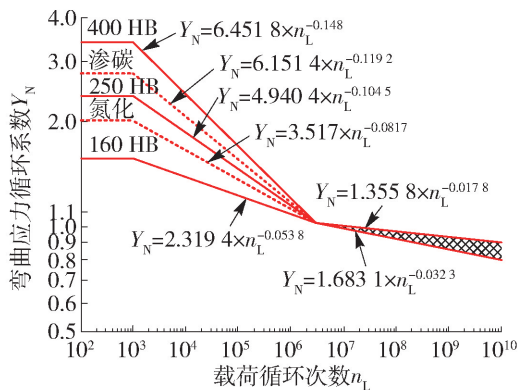
此外星型轮系中作为中间齿轮的星轮同时参与内外啮合,单个轮齿的接触齿面不一样,其齿根会承受对称循环载荷的作用,在计算过程中其齿根弯曲疲劳极限应按照脉动循环应力的 70% 选取.

### 3.3 计算结果

在额定工况下,以 5 级精度为例,查询 ISO 1328—1:1995 标准,得到齿轮的制造、安装误差,取安装、制造误差的极限值,通过求解在当量啮合误差下 GTF 星型轮系外内啮合的均载系数和动载系数,取同一时刻星轮均载系数和动载系数的最大值作为该时刻传动系统外、内啮合的载荷系数,其随时间的变化曲线如图 7、8 所示,从图中可得最大均载系数为:  $\Omega_{sm} = 1.051, \Omega_{tm} = 1.056$ ;最大动载系数为:  $k_{vs} =$



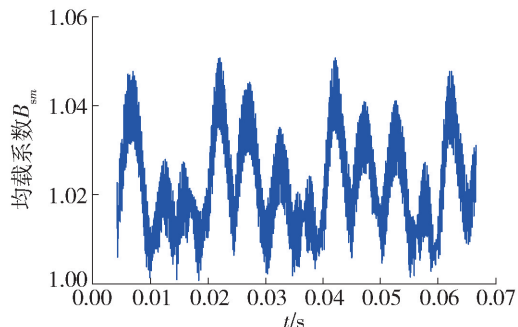
(a) 接触疲劳



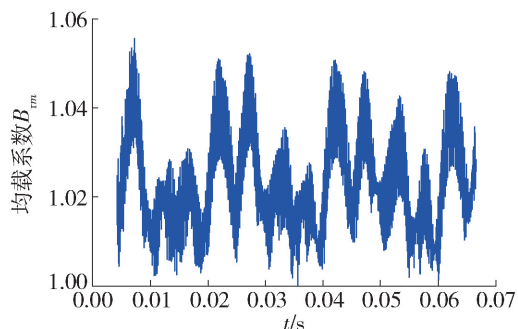
(b) 弯曲疲劳

图 6 应力循环系数

Fig. 6 Stress cycle factors



(a) 外啮合



(b) 内啮合

图 7 星型轮系均载系数

Fig. 7 Load sharing coefficient of the star gear transmission system

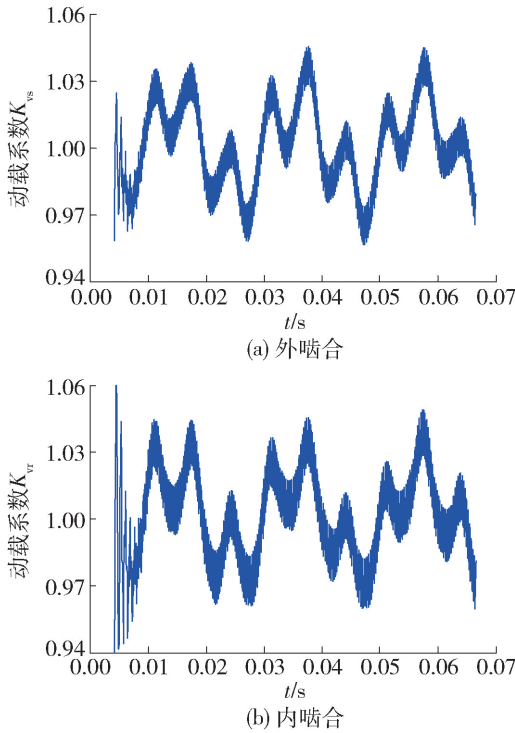


图8 星型轮系动载系数

Fig. 8 Dynamic load coefficient of the star gear transmission system

表1 GTF 星型轮系齿轮参数

Table 1 Gear parameters optimal result of the star gear transmission system for the GTF engine

项目	名称	$m_n/mm$	$z$	$\alpha_n/(^\circ)$	$\beta/(^\circ)$	$x$	$b/mm$
原参数	太阳轮		33			0	
	星轮	3.75	32	20	31.54	0	90
	内齿轮		97			0	
优化参数	太阳轮		34			0.001	
	星轮	4.50	31	25	30.00	0.020	70
	内齿轮		96			-0.048	

表2 GTF 星型轮系齿轮优化结果

Table 2 Optimal result of the star gear transmission system for the GTF engine

项目	齿轮	弯曲安全系数	接触安全系数	体积/ $mm^3$
优化前	太阳轮	1.20	1.09	
	星轮	1.17	1.10	$1.19 \times 10^7$
	内齿轮	2.02	1.32	
优化后	太阳轮	1.94	1.27	
	星轮	1.95	1.28	$1.11 \times 10^7$
	内齿轮	2.44	1.26	

## 4 结论

1) 本文给出了重载行星齿轮传动等强度优化设计数学模型,模型基于动力学计算了齿轮强度公

1.045,  $k_{vr} = 1.049$ .

将所计算得到的动态载荷系数代入到式(2)和式(4)中,利用 Matlab 软件优化工具箱中的 fmincon 函数求解,计算和圆整后得到各级齿轮参数的优化结果并与原设计参数对比,结果见表1,表中  $m_n$  为法向模数,  $z$  为齿数,  $\alpha_n$  为法向压力角,  $\beta$  为螺旋角,  $x$  为变位系数,  $b$  为人字齿单侧齿宽.

基于 ANSI/AGMA 2101-D04 标准,引入动力学模型所计算出来的均载系数和动载系数,分别计算 GTF 人字齿星型轮系的接触和弯曲疲劳强度安全系数,并根据表1的传动参数对齿轮箱进行初步建模以计算传动机构体积,为了排除齿轮轴孔相对大小差异对体积大小的影响,在保证轮毂强度足够的前提下,按照设计经验取轮缘厚度为3倍的模数,优化前后传动机构各级齿轮的安全系数和体积对比分析结果如表2所示,从表2可以看出,虽然原设计参数也能满足强度要求,但是太阳轮、星轮的强度和内齿圈的强度差异较大,这样的设计结果会导致太阳轮和星轮过早失效而导致的整个传动链的失效,而经过优化后的参数基本上可以满足各级齿轮等强度,且体积相比原参数要减小6.72%,设计参数更加合理.

式中的均载系数和动载系数,考虑了应力循环对齿轮许用应力的影响.

2) 以各齿轮安全系数差和体积最小为目标函数得到的设计参数,可以使行星轮系各级齿轮的寿命接近或一致,能有效发挥各级齿轮的性能.

3) 优化设计模型所得到的计算参数更加合理,能够有效减小传动机构的体积,节约制造成本.

## 参考文献:

[1] 秦大同, 谢里阳. 现代机械设计手册[M]. 北京: 化学工业出版社, 2011: 411-414.  
 [2] 陈惠. ZY 系列减速器齿轮强度计算及减速器齿轮等强度优化设计软件研制[D]. 苏州: 苏州大学, 2007.  
 CHEN H. The calculation of strength for reducers zy and software development of gears equal strength optional

- design and reducers [D]. Suzhou: Suzhou university, 2007. (in Chinese)
- [3] 吴继泽, 王统. 齿根过渡曲线与齿根应力[M]. 北京: 国防工业出版社, 1989: 20-21.
- [4] 铁摩辛柯, 古地尔. 弹性理论[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2013: 13-28.
- [5] ISO. Calculation of load capacity of spur and helical gears—part 2: calculation of surface durability (Pitting): ISO 6336-2-1996 [S]. Geneva: ISO, 1996.
- [6] ISO. Calculation of load capacity of spur and helical gears—part 3: calculation of tooth bending strength: ISO 6336-3-1996[S]. Geneva: ISO, 1996.
- [7] American Gear Manufacturers Association. Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth (metric edition): ANSI/AGMA 2101—D-2004[S]. Alexandria, VA: AGMA, 2004.
- [8] 邱宣怀. 机械设计[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 1997: 207-254.
- [9] 濮良贵. 机械设计[M]. 8版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 186-236.
- [10] 黄平, 朱文坚. 机械设计基础[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 147-194.
- [11] KAWALEC A, WIKTOR J, CEGLAREK D. Comparative analysis of tooth-root strength using ISO and AGMA standards in spur and helical gears with FEM-based verification [J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(5): 1141-1158.
- [12] 周长江, 唐进元, 刘艳萍, 等. 齿轮传动设计两种计算标准的比较研究[J]. 机械传动, 2006, 30(3): 9-10.  
ZHOU C J, TANG J Y, LIU Y P, et al. Comparative study of calculation of gear drive design by two standards [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2006, 30(3): 9-10. (in Chinese)
- [13] 吴昌林, 吕云霏. ISO与AGMA渐开线圆柱齿轮强度计算标准的比较[J]. 中国机械工程, 2011, 22(12): 1418-1423.  
WU C L, LÜ Y F. Comparison between ISO and AGMA gear strength rating methods for involute cylindrical gears [J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(12): 1418-1423. (in Chinese)
- [14] CAHALA G. ISO 6336 vs AGMA 2001 gear rating comparison for industrial gear applications [C] // Cement Industry Technical Conference, 1999. Conference Record. 1999 IEEE-IAS/PCA. New York: IEEE, 1999: 19-22.
- [15] SHUTING L. Effect of addendum on contact strength, bending strength and basic performance parameters of a pair of spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(12): 1557-1584.
- [16] 李发家, 朱如鹏, 李苗苗, 等. 高重合度外啮合齿轮齿根弯曲应力计算方法[J]. 航空动力学报, 2017(1): 138-147.  
LI F J, ZHU R P, LI M M, et al Calculation method of external meshed gear tooth root bending stress of high contact ratio gear [J]. Journal of Aerospace Power, 2017(1): 138-147. (in Chinese)
- [17] LUCHKO I I, LIVDAR V A. Calculation and design of sheets with a circular hole with equal strength reinforcement and with minimum mass [J]. Soviet Materials Science, 1989, 24(4): 415-418.
- [18] 杜海霞. 圆柱齿轮减速器的最小体积优化设计[J]. 机械工程与自动化, 2011, 2(1): 186-189.  
DU H X. Optimization design for the minimum volume of cylindrical gear reducer [J]. Mechanical Engineering and Automation, 2011, 2(1): 186-189. (in Chinese)
- [19] 秦大同, 邢子坤, 王建宏. 基于动力学和可靠性的风力发电齿轮传动系统参数优化设计[J]. 机械工程学报, 2008, 44(7): 24-31.  
QIN D T, XING Z K, WANG J H. Optimization design of system parameters of the gear transmission of wind turbine based on dynamics and reliability [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(7): 24-31. (in Chinese)
- [20] 王慧, 袁茹, 王三民. 功率分流齿轮传动的等强度优化设计[J]. 机械传动, 2012, 36(3): 40-42.  
WANG H, YUAN R, WANG S M. Optimal design on equal stress intensity of split-torque gear [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2012, 36(3): 40-42. (in Chinese)
- [21] 焦万铭, 杨珏, 马飞, 等. 变速器行星齿轮机构等强度优化设计[J]. 农业机械学报, 2015, 46(1): 359-364.  
JIAO W M, YANG J, MA F, et al. Equal strength optimal design of planetary gear transmission [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(1): 359-364. (in Chinese)
- [22] 李波, 吴来杰, 李鹏翔, 等. 多功能摩擦磨损实验机的研制[J]. 制造技术与机床, 2008(1): 48-50.  
LI B, WU L J, LI P X, et al. Development of the multi-functional friction and wear tester [J]. Manufacturing Technology and Machine Tool, 2008(1): 48-50. (in Chinese)
- [23] STRINGER D B. Geared rotor dynamic methodologies for advancing prognostic modeling capabilities in rotary-wing transmission systems [D]. Virginia: University of Virginia, 2008.
- [24] MAATAR M, VELEX P. An analytical expression for the time-varying contact length in perfect cylindrical gears: some possible applications in gear dynamics [J]. Journal of Mechanical Design, 1996, 118(4): 586-589.
- [25] 魏静, 张爱强, 秦大同, 等. 考虑结构柔性的行星轮系耦合振动特性研究[J]. 机械工程学报, 2017, 53(1): 1-12.  
WEI J, ZHANG A Q, QIN D T, et al. Coupling vibration analysis for planetary gear system considering flexible structure [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(1): 1-12. (in Chinese)