

# 有限理性视野下拥挤收费对交通流逐日演化规律影响

李 涛, 关宏志

(北京市交通工程重点实验室(北京工业大学), 北京 100124)

**摘要:** 为了解决拥挤收费政策在不同理性程度群体构成的交通流中的实施效果问题,在逐日路径演化模型的基础上引入拥挤收费政策,建立新的模型以研究拥挤收费条件下出行者逐日路径选择行为. 并以一个由2条路径构成的路网为例,探讨了有限理性视野下拥挤收费政策对网络交通流逐日动态演化过程的影响. 通过数值实验,分析了拥挤收费条件下网络交通流的演化特征,发现拥挤收费对网络交通流演化的最终状态以及系统平均走行时间有一定的影响;出行者的时间价值、理性程度会影响拥挤收费政策的实施效果.

**关键词:** 有限理性; 拥挤收费; 网络交通流; 动态演化

中图分类号: U 491

文献标志码: A

文章编号: 0254-0037(2018)03-0401-08

doi: 10.11936/bjutxb2017050006

## Influence of Congestion Pricing on Day-to-day Dynamical Evolution of Traffic Flow Under Bounded Rational View

LI Tao, GUAN Hongzhi

(Beijing Key Laboratory of Transportation Engineering (Beijing University of Technology), Beijing 100124, China)

**Abstract:** In order to study the impact of congestion pricing policy on traffic flow which is composed of travelers with different rational degree, congestion pricing policy of day-to-day route choice evolution model was introduced and a model to study the behavior of the day-to-day route choice of travelers under the condition of congestion pricing was established. The effects of congestion pricing policy of day-to-day dynamic evolution were discussed by a network consisting of two paths. A numerical experiment was made to analyzed evolution characteristics of the network traffic flow under congestion pricing. It shows that the congestion pricing policy has a certain effect on the evolution result and average travel time. In addition, the value of time and the degree of rationality affect the effect of the implementation of congestion pricing policy.

**Key words:** bounded rationality; congestion pricing; network traffic flow; dynamical evolution

利用道路拥挤收费来缓解交通拥堵已经有了许多的研究和实践<sup>[1-9]</sup>. 网络交通流的形成和演变规律与出行者的日常活动密切相关,已有研究表明:网络交通流呈现出逐日(day-to-day)演化的规律,即:出行者第 $n$ 天的行为受到前 $n-1$ 天的行为结果的

影响<sup>[10]</sup>. 在这个假设条件下,学者们建立了逐日路径分配模型<sup>[11-12]</sup>,并以非线性动力学理论为基础,研究平衡的存在性及其稳定性<sup>[13-27]</sup>. 通过这些研究发现,当出行者特征(理性程度、信息敏感程度、历史信息权重)满足一定条件时,演化结果将出现分

收稿日期: 2017-05-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51338008,51378036)

作者简介: 李 涛(1988—),男,博士研究生,主要从事交通规划、交通行为、交通流演化方面的研究, E-mail: taoli0505@emails.bjut.edu.cn

岔和混沌现象,从而对交通管理造成不利影响<sup>[28-29]</sup>.

对城市道路实行拥挤收费,势必会影响驾驶员选择行为,从而影响网络交通流演化. 本文在逐日路径演化模型的基础上,引入动态拥挤收费政策,研究费率制定对分配结果以及交通流演化结果的影响,探讨费率和收费条件(部分路段或全网)对不同群体(时间价值和理性程度)的影响.

## 1 考虑拥挤收费的交通流演化模型

### 1.1 模型建立

假设交通网络如图 1 所示,其中起讫点  $A$  和  $B$  之间的出行总需求为  $D$  且恒定不变. 设  $f_i^{(n)}$  为路径  $i$  第  $n$  天的流量( $i=1,2$ );  $V_i^{(n)}$  为路径  $i$  第  $n$  天的感知广义出行成本;  $\bar{V}_i^{(n)}$  为路径  $i$  第  $n$  天的实际广义出行成本;  $t_i^{(n)}$  为路径  $i$  第  $n$  天的感知出行时间;  $\bar{t}_i^{(n)}$  为路径  $i$  第  $n$  天的实际出行时间;  $c_i^{(n)}$  为路径  $i$  第  $n$  天的感知拥挤收费费用;  $\bar{c}_i^{(n)}$  为路径  $i$  第  $n$  天的实际拥挤收费费用;  $\alpha$  为时间价值.

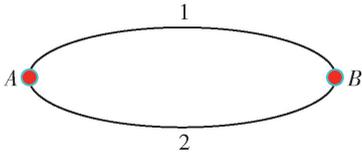


图 1 路网示意图

Fig. 1 Schematic diagram of road network

出行者第  $n$  天的路径选择由其对路径的感知广义出行成本决定,根据有限理性二次 logit (bounded rational binary logit, BRBL) 模型<sup>[28]</sup>,给出路径  $i$  ( $i=1,2$ ) 第  $n$  天的选择概率分别为

$$P_1^{(n)} = \frac{1}{1 + \beta e^{\theta(V_1^{(n)} - V_2^{(n)})}} + \frac{\beta}{\beta + e^{\theta(V_1^{(n)} - V_2^{(n)})}} \quad (1a)$$

$$P_2^{(n)} = 1 - P_1^{(n)} \quad (1b)$$

式中:  $\theta \in (0, +\infty)$  为出行者对路径广义出行成本的敏感程度,  $\theta$  越大,出行者对路径的广义出行成本越敏感,反之则越不敏感;  $\beta \in [0, 1]$  为出行者的理性程度,  $\beta$  越大(小),其理性程度越高(低),当  $\beta = 1(0)$  时,决策者完全理性(完全非理性).  $V_i^{(n)}$  为路径  $i$  第  $n$  天的广义出行成本,由出行时间成本和拥挤收费成本组成,通过时间价值( $\alpha$ )将二者统一,即:  $V_i^{(n)} = \alpha t_i^{(n)} + c_i^{(n)}$  ( $i=1,2$ ),带入式(1a)(1b)后得到

$$P_1^{(n)} = \frac{1}{1 + \beta e^{\theta(\alpha t_1^{(n)} - \alpha t_2^{(n)} + c_1^{(n)} - c_2^{(n)})}} +$$

$$\frac{\beta^\theta}{\beta^\theta + e^{\theta(\alpha t_1^{(n)} - \alpha t_2^{(n)} + c_1^{(n)} - c_2^{(n)})}} \quad (2a)$$

$$P_2^{(n)} = 1 - P_1^{(n)} \quad (2b)$$

第  $n$  天的感知广义出行成本根据第  $n-1$  天的感知广义出行成本和实际广义出行成本更新,可表示成二者的加权和,即

$$V_i^{(n)} = \varphi V_i^{(n-1)} + (1 - \varphi) \bar{V}_i^{(n-1)}, i=1,2 \quad (3)$$

式中,  $\varphi \in [0, 1]$  反映出行者对前一天感知广义出行成本的依赖程度,  $\varphi$  值越大,依赖程度越大;反之,依赖程度越小. 由此,得到考虑拥挤收费的交通流逐日动态演化模型为

$$V_i^{(n)} = \varphi V_i^{(n-1)} + (1 - \varphi) \bar{V}_i^{(n-1)} = \varphi(\alpha t_i^{(n-1)} + c_i^{(n-1)}) + (1 - \varphi)(\alpha \bar{t}_i^{(n-1)} + \bar{c}_i^{(n-1)}), \quad i=1,2 \quad (4)$$

假设各路径第  $n$  天的实际出行时间只与该路径流量有关,出行时间函数为:  $\bar{t}_i^{(n)} = g_i(f_i^{(n)})$ ,  $g_i(x)$  一般采用美国联邦公路局路阻 (Bureau of Public Roads, BPR) 函数;路径  $i$  第  $n$  天的感知(实际)拥挤费用只与其第  $n$  天的感知(实际)出行时间有关,感知(实际)拥挤费用函数为

$$c_i^{(n)} = h_i(t_i^{(n)}) \quad (\bar{c}_i^{(n)} = h_i(\bar{t}_i^{(n)}))$$

带入式(4),得

$$V_i^{(n)} = \varphi(\alpha t_i^{(n-1)} + h_i(t_i^{(n-1)})) + (1 - \varphi)(\alpha(g_i(f_i^{(n-1)})) + h_i(g_i(f_i^{(n-1)}))) \quad (5)$$

根据随机用户均衡 (stochastic user equilibrium, SUE) 原则<sup>[27]</sup>,流量分配为:  $f_i^{(n)} = DP_i^{(n)}$  ( $i=1,2$ ),联立式(5)及式(1a)(1b),得到

$$f_1^{(n)} = \frac{D}{1 + \beta^\theta e^{\theta(\alpha t_1^{(n)} - \alpha t_2^{(n)} + h_1(t_1^{(n)}) - h_2(t_2^{(n)})))}} + \frac{D\beta^\theta}{\beta^\theta + e^{\theta(\alpha t_1^{(n)} - \alpha t_2^{(n)} + h_1(t_1^{(n)}) - h_2(t_2^{(n)})))}} \quad (6a)$$

$$f_2^{(n)} = D - f_1^{(n)} \quad (6b)$$

式(5)及式(6a)(6b)共同构成最终考虑拥挤收费的交通流逐日动态演化系统.

初始日期(第 1 天), 2 条路径的流量是随机的(因为出行者的感知广义成本随机),随着出行次数的累积,出行者不断更新感知广义成本,2 条路径的流量也逐渐向某一规律性演化发展,直至最终形成 3 种状态:稳定、周期震荡(分岔)或类周期性(混沌)<sup>[10]</sup>. 下面将介绍判别 3 种演化状态的临界条件,并讨论拥挤收费政策下的判别条件变化.

### 1.2 演化状态及临界条件

文献[10]给出了 2 条路径逐日选择的平衡点

稳定条件以及系统混沌条件,如表1所示。

表1 逐日演化状态判别

Table 1 State discrimination of day-to-day evolution

最终状态	判别条件
收敛于平衡点且稳定	$\lambda > -1$
出现分岔(周期振荡)	$\lambda \leq -1$ 且 $L \leq 0$
出现混沌	$L > 0$

注: $\lambda = \varphi - (1 - \varphi)DP'_1(g'_1 + g'_2) > -1$  ( $\lambda$  为动态系统 Jacobian 矩阵的特征根);  $L$  为 Lyapunov 指数。

分岔,即周期性变化;混沌,即非周期性变化。以本文2条平行路径构成的交通网络为例:当满足“稳定”状态条件时,2条路径的流量稳定在平衡点(即SUE解),每天的交通量为固定值;当满足“分岔”状态条件时,2条路径每天的流量在2个(或更多)值之间交替出现;当满足“混沌”状态条件时,2条路径的流量在一定的区间内出现,不固定,且无周期规律。

文献[28]讨论了理性程度 $\beta$ 对最终演化结果的影响,本文将在在此基础上着重探讨拥挤收费费率和系统演化的关系。

### 1.3 拥挤收费定价方案

拥挤收费模式可分为2种:一种是设置拥挤收费区域或路段,根据车辆驶入驶出,按次收费;另一种是依据拥挤程度,即根据车辆在拥挤收费区域(或路段)的行驶时间计费。本文主要利用第2种定价方案,根据车辆行驶时间对拥挤路段收取拥挤费用,即收取的拥挤费用与走行时间正相关,具体方案如下。

本文假设对路径*i*收取的拥挤费用是与路径*i* ( $i = 1, 2$ ) 延误时间占自由流时间比例线性相关的函数,即

$$c_i^{(n)} = h_i(t_i^{(n)}) = k_i t_{id} / t_{i0} = k_i (t_i^{(n)} - t_{i0}) / t_{i0} \quad (7a)$$

$$\bar{c}_i^{(n)} = h_i(\bar{t}_i^{(n)}) = k_i \bar{t}_{id} / t_{i0} = k_i (\bar{t}_i^{(n)} - t_{i0}) / t_{i0} \quad (7b)$$

式中: $t_{id}$ 为路径*i*的延误时间; $k_i > 0$ 为路径*i*的拥挤收费费率。 $k_i$ 越大,相同延误时间收取的拥挤费用越高。由式(7a)(7b)容易看出,对路径*i*收取的拥挤费用是与路径*i*走行时间相关的线性函数。路径*i*走行时间越长,收取的拥挤费用越高,当路径*i*走行时间为其自由流时间时,不收取拥挤费用。

将式(7a)(7b)带入动态演化系统,计算Jacobian矩阵的特征根,得到

$$\lambda' = \varphi - (1 - \varphi)DP'_1(g'_1(1 + k_1/t_{10}) + g'_2(1 + k_2/t_{20})) \quad (8)$$

比较 $\lambda'$ 与 $\lambda$ ,发现 $\lambda' \leq \lambda$ ,当且仅当2条路径收取的拥挤费用均为0时, $\lambda' = \lambda$ 。由此可知:1)若 $\lambda' > -1$ ,则 $\lambda > -1$ ,即若收取拥挤费用时系统渐近稳定,则取消拥挤收费后系统必渐近稳定;2)若 $\lambda < -1$ ,则 $\lambda' < -1$ ,即若收费前系统为非渐近稳定状态,则收费后系统必将处于非渐近稳定状态;3)存在 $\lambda > -1, \lambda' < -1$ 点,即收取拥挤费用后可能打破系统原有的平衡状态。

本文研究的逐日演化规律并非某一时段(如1周),而是指某天(如第100天)过后,系统所呈现的演化规律。即:若干天(如100d)过后,若不向系统施加外部干预,系统将长期维持某种状态(稳定、分岔、混沌)。下面通过数值实验的方法,研究各参数对系统最终演化状态的影响。

## 2 数值实验

设在图1所示路网中,路径的实际行程时间关于流量的函数采用BPR函数: $\bar{t}_i^{(n)} = t_i [1 + 0.15 \times (f_i^{(n)} / Q_i)^4]$ ,  $i = 1, 2$ 。其中: $t_{i0}$ 为路径*i*的自由流行程时间; $Q_i$ 为路径*i*的通行能力。路径1的自由流行程时间 $t_{10} = 20$  min,通行能力 $Q_1 = 1500$  辆/h,路径2的自由流行程时间 $t_{20} = 30$  min,通行能力 $Q_2 = 2000$  辆/h。A和B直接的出行需求 $D = 2500$  辆/h。当A、B间需求全部加载到路径1上时,2条路径的出行时间分别为43.1、30.0 min,当A、B间需求全部加载到路径2上时,2条路径的出行时间分别为20.0、41.0 min。将基本设定带入式(5)和式(6a)(6b),得到网络交通流演化模型。

利用matlab2012计算得到路径1和路径2的1000d的分配流量。具体步骤如下:

1) 给定2条路径第1天感知广义成本 $V^{(1)} = (V_1^{(1)}, V_2^{(1)})$ 。

2) 带入式(1a)(1b)并加载需求,计算得到第1天路径流量 $f^{(1)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(1)})$ 。

3) 利用BPR函数计算得到第1天路径实际走行时间 $\bar{t}^{(1)} = (\bar{t}_1^{(1)}, \bar{t}_2^{(1)})$ ,并利用式(7a)(7b)计算得到第1天拥挤费用 $c^{(1)} = (c_1^{(1)}, c_2^{(1)})$ ,从而计算得到第1天实际广义成本 $\bar{V}^{(1)} = (V_1^{(1)}, V_2^{(1)})$ 。

4) 利用式(4)计算得到第2天的感知广义成本 $V^{(2)} = (V_1^{(2)}, V_2^{(2)})$ 。

5) 重复步骤2)直至得到第1000天的路径流量 $f^{(1000)} = (f_1^{(1000)}, f_2^{(1000)})$ 。

6) 选取 800 d 以后的部分作为研究对象.

## 2.1 双路径拥挤收费对动态系统的影响

根据文献[28]的研究,取成本敏感系数  $\theta = 0.15$ , 理性程度  $\beta = 0.8$ , 将前一天广义成本依赖程度  $\varphi = 0.6$  作为一般情况. 令 2 条路径的拥挤收费费率相等, 即  $k_1 = k_2 = k$ , 考虑到用户对拥挤收费政策的接受程度, 取  $k \in [0, 10]$  (单位: 元/1 倍延误时间), 这样, 用户一次出行需缴纳的拥挤费用在  $[0, 22]$  (单位: 元), 当全部流量加载到路径 1 上时, 取得上限 22 元.

时间价值分别取  $\alpha = 30$  元/h,  $\alpha = 50$  元/h,  $\alpha = 80$  元/h, 则系统演化最终状态路径 1 的流量如图 2 所示, 系统平均走行时间如图 3 所示.

由图 2 可以看出:

1) 路径 1 的流量逐渐减小, 出行者向路径 2 转移. 对于时间价值较低的群体 ( $\alpha = 30$ ), 收取一定

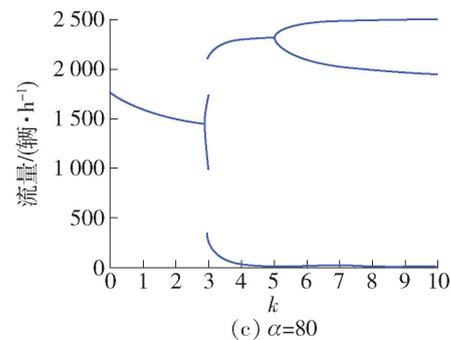
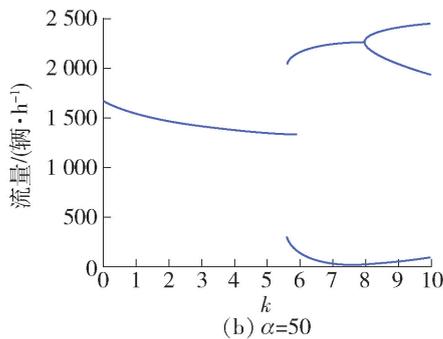
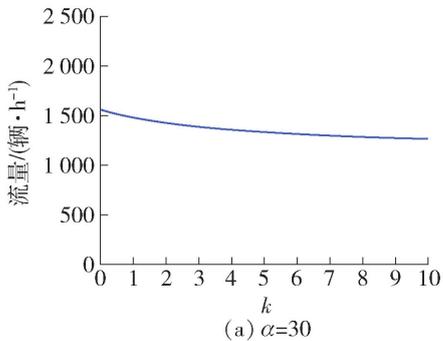


图 2  $\alpha$  不同时路径 1 的流量与  $k$  的关系 (双路径收费)

Fig. 2 Relationship of the path 1 flow depending on  $k$  when  $\alpha$  is different (Double path charge)

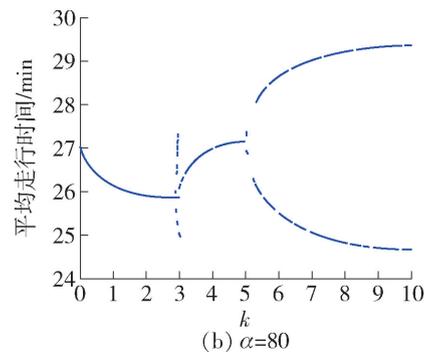
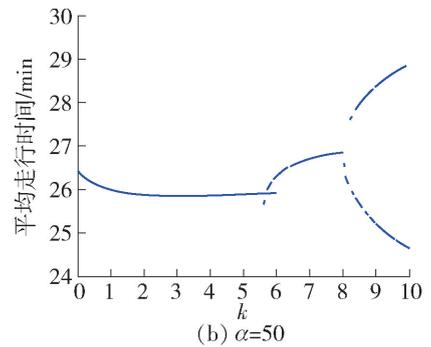
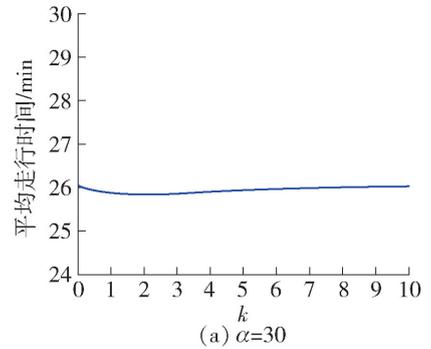


图 3  $\alpha$  不同时系统平均走行时间与  $k$  的关系 (双路径收费)

Fig. 3 Relationship of system average travel time depending on  $k$  when  $\alpha$  is different (Double path charge)

的拥堵费用可以调节路径流量, 并使得系统依然处于稳定状态.

2) 对时间价值较大的群体收取一定的拥堵费用可以调节路径流量, 但若拥堵费率设置过高, 则会出现分岔现象, 这将不利于交通管理.

3) 时间价值较高的群体 ( $\alpha = 80$ ), 出现分岔的临界费率降低, 且分岔振幅增大.

由图 3 可以看出:

1) 收取一定的拥堵费用可以降低系统平均走行时间, 但费率过高, 系统平均走行时间反而增加. 因此, 存在一个最优收费费率, 使得系统平均走行时间最小.

2) 对于时间价值为 50 元/h 的群体, 低拥堵收费费率将会降低系统平均走行时间, 而且效果较时

间价值为 30 元/h 的群体更为明显,但费率过高不仅会增加系统平均走行时间,而且由于分岔现象的产生,系统平均走行时间也会出现周期震荡的现象。

总的看来,通过拥堵收费调节路径流量,进而降低系统平均走行时间的思路对于高时间价值群体效果更为明显,但也更容易产生不稳定的分岔现象。

### 2.2 单路径拥挤收费对动态系统的影响

取成本敏感系数  $\theta = 0.15$ , 理性程度  $\beta = 0.8$ , 前一天广义成本依赖程度  $\varphi = 0.6$ . 路径 1 收取一定拥挤费用, 即  $k_1 \in [0, 10]$  (单位: 元/1 倍延误时间); 路径 2 不收费, 即  $k_2 = 0$  (单位: 元/1 倍延误时间). 时间价值分别取  $\alpha = 30$  元/h,  $\alpha = 50$  元/h,  $\alpha = 80$  元/h, 系统演化最终状态路径 1 的流量如图 4 所示, 系统平均走行时间如图 5 所示。

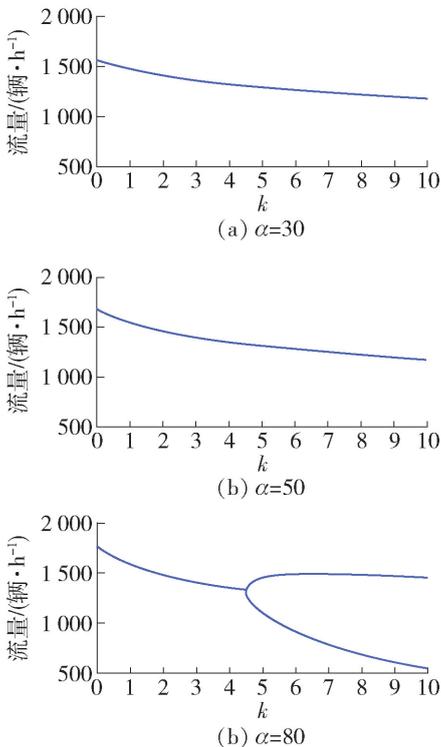


图 4  $\alpha$  不同时路径 1 的流量与  $k_1$  的关系 (单路径收费)

Fig. 4 Relationship of the path 1 flow depending on  $k_1$  when  $\alpha$  is different (Single path charge)

由图 4 可以看出:

1) 随着拥堵收费费率的提升, 路径 1 的流量逐渐减小, 出行者向路径 2 转移. 与双路径收费模式相同, 低时间价值 ( $\alpha = 30$ ) 的群体在单路径收费模式下同样没有出现分岔现象。

2) 相比双路径收费模式, 时间价值为 50 元/h 的群体随着费率的提升, 路径交通流仍然保持稳定,

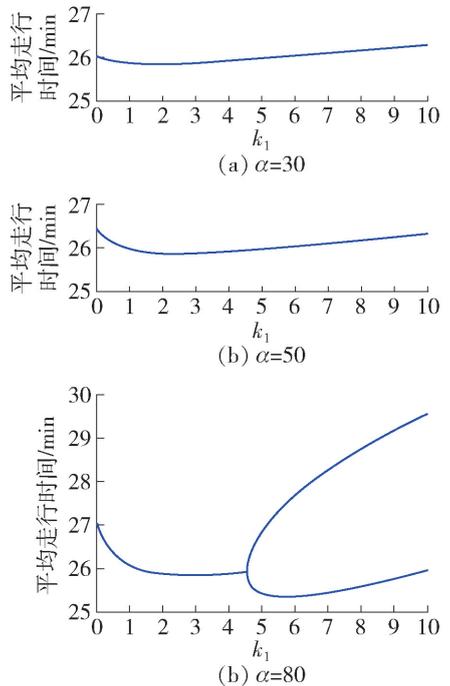


图 5  $\alpha$  不同时系统平均走行时间与  $k_1$  的关系 (单路径收费)

Fig. 5 Relationship of system average travel time depending on  $k_1$  when  $\alpha$  is different (Single path charge)

路径 1 流量向路径 2 转移更为迅速, 拥堵收费效果更为明显, 说明单路径收费模式可以设置更高的费率, 使系统维持稳定。

3) 相比双路径收费模式, 高时间价值 ( $\alpha = 80$ ) 的群体在单路径收费模式下出现分岔现象相对有所推迟, 而且振幅更小, 说明单路径收费模式的系统更加稳定。

由图 5 可以看出:

1) 单路径收费模式同样存在一个最优费率, 使得系统平均走行时间最小。

2) 随着拥堵收费费率的提升, 系统平均走行时间下降较时间价值为 30 元/h 的群体更为明显, 说明时间价值越高的群体, 其受拥堵收费的影响越大。

3) 平均走行时间随费率提高, 同样呈现先减后增的趋势, 且  $\alpha$  越高, 下降得越明显。

### 2.3 拥挤收费对理性程度不同的群体的影响

取成本敏感系数  $\theta = 0.15$ ,  $\alpha = 80$  元/h, 前一天广义成本依赖程度  $\varphi = 0.6$ . 2 条路径的拥挤收费费率相等, 即  $k_1 = k_2 = k, k \in [0, 10]$  (单位: 元/1 倍延误时间). 理性程度分别取  $\beta = 0.1, \beta = 0.4, \beta = 0.8$ , 系统演化最终状态路径 1 的流量如图 6 所示, 系统平均走行时间如图 7 所示。

由图 6 可以看出, 对 2 条路径同时收费, 不同理

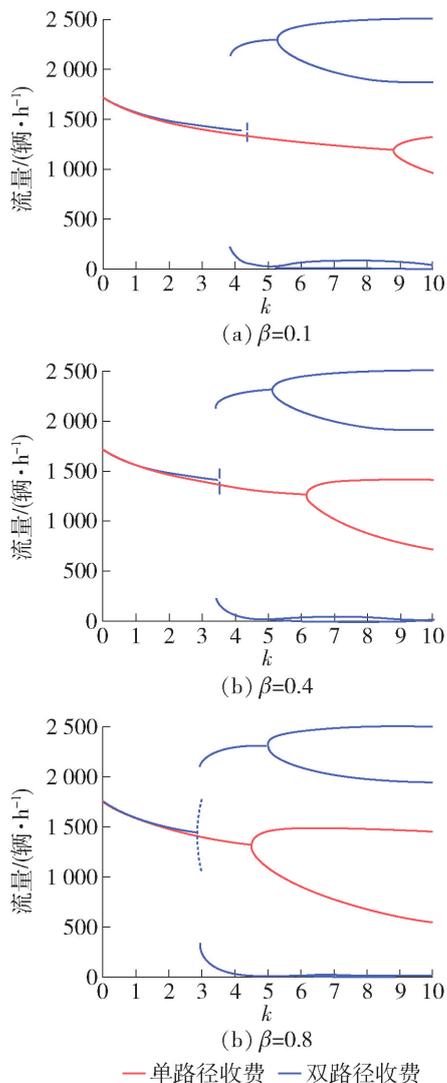


图6  $\beta$ 不同时路径1的流量与 $k$ 的关系

Fig. 6 Relationship of the path 1 flow depending on  $k$  when  $\beta$  is different

性程度的群体其组成的交通流演化规律无明显差异;只对其中一条路径收费,理性程度不同的群体表现出的差异明显,即理性程度较高的群体更容易出现分岔现象。

由图7可以看出,随着拥挤费率的提高,系统平均走行时间呈先减后增的趋势,平均走行时间最小值相差不大,但理性程度较高的群体容易出现分岔现象。

## 2.4 演化规律

通过以上分析可以看出,对路网收取拥挤费用,会直接影响系统演化结果,主要规律如下:

1) 较低的拥挤费率可以改变路网交通流稳定状态,费率提高会打破系统原有平衡状态,出现分岔现象。

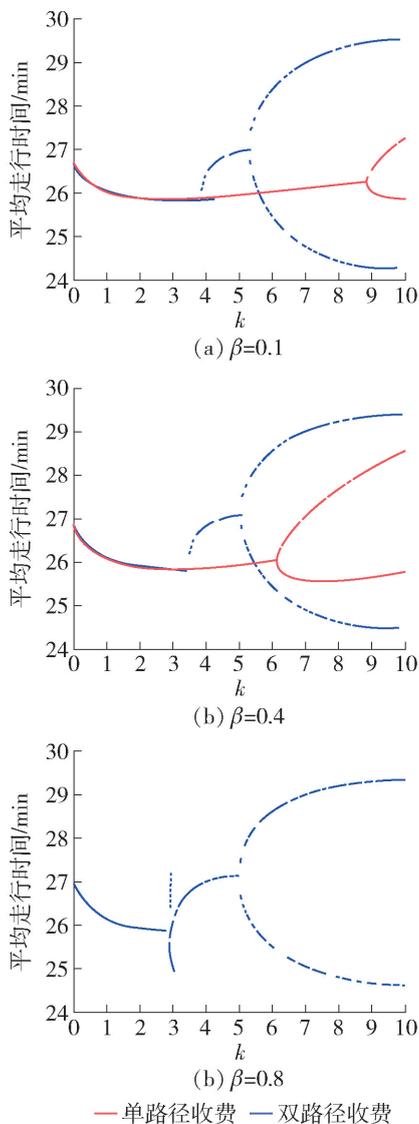


图7  $\beta$ 不同时系统平均走行时间与 $k$ 的关系

Fig. 7 Relationship of system average travel time depending on  $k$  when  $\beta$  is different

2) 较低的拥挤费率可以降低出行者平均走行时间,随着费率的提高走行时间反而增加。

3) 单路径收费模式比双路径收费模式更容易使系统维持稳定。

4) 单路径收费模式下,理性程度对交通流演化规律的影响更显著。

影响系统演化结果直接因素是雅克比矩阵的特征根 $\lambda$ 。拥挤收费使得 $\lambda$ 减小,由于系统稳定的条件为 $\lambda \geq -1$ ,所以增加拥挤收费会使得系统更不稳定,且费率越高,收费路段越多,系统越不稳定。

文中的拥挤收费水平采用收费费率 $k$ 进行衡量,而不是拥挤费用。这里的费率是指单位拥挤度收取的费用,其中拥挤度由路段实际走行时间与自

由流时间决定,详见式(7a)(7b)。换句话说,相同拥挤程度的路段,费率越高,收取的拥挤费用也相应越高。若拥挤收费水平(费率)过高,则交通量的变化不仅带来走行时间的变化,而且使费用的变化更为显著,因此,会影响系统的稳定性,造成剧烈的震荡,出现分岔现象。若拥挤收费与路段拥挤程度无关,则只要拥挤收费的费用稳定,收费水平(费用的高低)不会影响到系统演化。

### 3 结论

1) 拥挤收费会有条件地影响原有路网交通流的演化结果。当费率较低时,不会改变交通流稳定状态,降低出行者平均走行时间;当费率较高时,有可能会改变交通流的稳定状态,使交通流出现分岔现象,并使走行时间增加。

2) 单路径(某一路段)收费与双路径(全网)收费相比,更容易维持系统原有的稳定状态。

3) 群体理性程度越高,其构成的交通流在高费率区的演化结果越不稳定,且在单路径(某一路段)收费模式下,理性程度对交通流的影响更为显著。

4) 本文的研究主要使用的是2条路径的简单路网,且拥挤收费模式为:依路网拥挤程度设定拥挤费率,而实际路网更为复杂,且拥挤收费模式也不唯一。因此,在后续的研究中还需依据本文方法研究不同拥挤收费模式下的逐日路径演化规律,寻求更为合理的收费模式。

### 参考文献:

- [1] MAY A D. Road pricing: an international perspective[J]. *Transportation*, 1992, 19(4): 313-333.
- [2] YANG H, HUANG H J. Principle of marginal-cost pricing: how does it work in a general road network? [J]. *Transportation Research Part A: Policy & Practice*, 1998, 32(1): 45-54.
- [3] ARNOTT R, PALMA A D, LINDSEY R. Departure time and route choice for the morning commute [J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 1990, 24(3): 209-228.
- [4] ARNOTT R, PALMA A D, LINDSEY R. Route choice with heterogeneous drivers and group-specific congestion costs[J]. *Regional Science & Urban Economics*, 1992, 22(1): 71-102.
- [5] ARNOTT R, PALMA A D, LINDSEY R. A structural model of peak-period congestion: a traffic bottleneck with elastic demand[J]. *American Economic Review*, 1993, 83(1): 161-179.
- [6] BRAID R M. Uniform versus peak-load pricing of a bottleneck with elastic demand [J]. *Journal of Urban Economics*, 1989, 26(3): 320-327.
- [7] TABUCHI T. Dynamics of urban land use: sequential location of an office firm and residence [J]. *Journal of Urban Economics*, 1990, 28(1): 87-102.
- [8] HUANG H J. Fares and tolls in a competitive system with transit and highway: the case with two groups of commuters [J]. *Transportation Research Part E: Logistics & Transportation Review*, 2000, 36(4): 267-284.
- [9] ADLER J L, CETIN M. A direct redistribution model of congestion pricing [J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2001, 35(5): 447-460.
- [10] 刘诗序, 关宏志, 严海, 等. 网络交通流动态演化的混沌现象及其控制 [J]. *物理学报*, 2012, 61(9): 090506-01-090506-10.  
LIU S X, GUAN H Z, YAN H, et al. Chaotic behavior in the dynamical evolution of network traffic flow and its control [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(9): 090506-01-090506-01. (in Chinese)
- [11] CANTARELLA G E, WATLING D P. Modelling road traffic assignment as a day-to-day dynamic, deterministic process: a unified approach to discrete- and continuous-time models [J]. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 2016, 5(1): 69-98.
- [12] CANTARELLA G E, CASCETTA E. Dynamic processes and equilibrium in transportation networks: towards a unifying theory [J]. *Transportation Science*, 1995, 29(4): 305-329.
- [13] SMITH M J. The existence of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck [J]. *Transportation Science*, 1984, 18(4): 385-394.
- [14] FRIESZ T L, BEMSTEIN D H, MEHTA N J, et al. Day-to-day dynamic network disequilibria and idealized traveler information systems [J]. *Operations Research*, 1994, 42(6): 1120-1136.
- [15] ZHANG D, NAGUMEY A. On the local and global stability of a travel route choice adjustment process [J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 1996, 30(4): 245-262.
- [16] SMITH M J, WATLING D P. A route-swapping dynamical system and Lyapunov function for stochastic user equilibrium [J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2016, 85: 132-141.
- [17] BIE J, LO H K. Traffic dynamics in pursuit of equilibrium [J]. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, 2007, 7(1): 628-641.

- [18] BIE J, LO H K. Stability and attraction domains of traffic equilibria in a day-to-day dynamical system formulation [J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2010, 44(1): 90-107.
- [19] CHO H J, HWANG M C. Day-to-day vehicular flow dynamics in intelligent transportation network [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, 41(4): 501-522.
- [20] MOUNCE R. Convergence in a continuous dynamic queueing model for traffic networks [J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2006, 40(9): 779-791.
- [21] HE X, GUO X, LIU H X. A link-based day-to-day traffic assignment model [J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2010, 44(4): 597-608.
- [22] HOROWITZ J L. The stability of stochastic equilibrium in a two-link transportation network [J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 1984, 18(1): 13-28.
- [23] CASCETTA E, CANTARELLA G E. A day-to-day and within-day dynamic stochastic assignment model [J]. *Transportation Research Part A: Policy & Practice*, 1991, 25(5): 277-291.
- [24] CANTARELLA G E, CASCETTA E. Dynamic processes and equilibrium in transportation networks: towards a unifying theory [J]. *Transportation Science*, 1995, 29(4): 305-329.
- [25] WATLING D, HAZELTON M L. The dynamics and equilibria of day-to-day assignment models [J]. *Networks and Spatial Economics*, 2003, 3(3): 349-370.
- [26] 刘玉印, 刘伟铭, 田世艳. 出行者有限理性条件下混合策略网络均衡模型 [J]. *公路交通科技*, 2011, 28(7): 136-141.
- LIU Y Y, LIU W M, TIAN S Y. Network equilibrium model with mixed strategies under bounded rationality [J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2011, 28(7): 136-141. (in Chinese)
- [27] 张波, 隽志才, 林徐勋. 基于有限理性的弹性需求随机用户均衡交通分配模型 [J]. *计算机应用研究*, 2011, 28(9): 3268-3271.
- ZHANG B, JUN Z C, LIN X X. Stochastic user equilibrium model with elastic demand based on bounded rationality [J]. *Application Research of Computers*, 2011, 28(9): 3268-3271. (in Chinese)
- [28] 李涛, 关宏志, 梁科科, 等. 有限理性视野下网络交通流逐日演化规律研究 [J]. *物理学报*, 2016, 65(15): 11-21.
- LI T, GUAN H Z, LIANG K K, et al. Study on day-to-day dynamical evolution of network traffic flow under bounded rational view [J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65(15): 11-21. (in Chinese)
- [29] DAGANZO C F, SHEFFI Y. On stochastic models of traffic assignment [J]. *Transportation Science*, 1977, 11(3): 253-274.

(责任编辑 梁洁)