

# 自锚式斜拉-悬索协作体系竖向弯曲振动计算公式

张筱雨<sup>1</sup>, 宋 涛<sup>2</sup>

(1. 长安大学公路学院, 西安 710064; 2. 山东交通学院土木工程学院, 济南 250037)

**摘要:** 为方便计算自锚式斜拉-悬索协作体系的竖向自振频率,以三跨连续协作体系为研究对象,在计入主塔刚度的影响下,应用 Rayleigh 法,推导了该体系的竖向弯曲振动频率公式,提出了主塔刚度影响系数的表达式,最后对此公式的可行性进行了算例验证。研究表明:该体系的竖向弯曲振动频率比同等结构布置的自锚式悬索桥的竖向弯曲频率略有增大;主塔刚度对该体系的一阶对称竖弯频率影响较大,进行此频率计算时应计入主塔刚度的影响,而对一阶反对称竖弯无影响;给出的能量法得到的竖弯基频计算值与有限元值误差能满足概念设计阶段的要求;该公式可用于自锚式斜拉-悬索协作体系在初步概念设计中选择合适的结构计算参数。

**关键词:** 桥梁工程; 自锚式斜拉-悬索协作体系; 竖弯频率; Rayleigh 法; 估算公式

中图分类号: U 441.3

文献标志码: A

文章编号: 0254-0037(2017)10-1502-06

doi: 10.11936/bjtxb2016120037

## Estimation Frequency Formulas of Vertical Vibration for Self-anchored Cable-suspension Bridge

ZHANG Xiaoyu<sup>1</sup>, SONG Tao<sup>2</sup>

(1. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, China;

2. School of Civil Engineering, Shandong Jiaotong University, Jinan 250037, China)

**Abstract:** To calculate vertical frequency of the self-anchored hybrid cable-suspension bridge conveniently, the self-anchored hybrid cable-suspension bridge with double-tower was taken as research object. Frequency formulas for the first symmetric and asymmetric vertical vibration modes were induced by the Rayleigh method and the influence of coefficient for tower stiffness was proposed. Finally, the presented analytic formulas were validated by the engineering project. The results indicate that the vertical vibration frequency of self-anchored hybrid cable-suspension bridge is slightly higher than that of the self-anchored suspension bridge. Tower stiffness which should be correctly considered in frequency calculation has a great influence on the first symmetric vertical frequency, while it has no effect on the first asymmetric vertical frequency. The error between values calculated by the proposed formulas and the finite element method (FEM) meets with the requirement of conceptual design. The proposed formulas can be applied to select reasonable parameters for the self-anchored cable-suspension bridge in conceptual design stage.

**Key words:** bridge engineering; self-anchored cable-stayed-suspension bridge; vertical frequency; Rayleigh method; estimation formula

## 1 研究背景

近年来,自锚式斜拉-悬索协作体系桥梁以其优美、错落有致的造型等特点越来越受到青睐,在景观要求较高的地方有较强的竞争力.开展自锚式斜拉-悬索体系桥梁的固有振动特性研究是分析该体系抗风、抗震及车桥耦合等的基础,对振动特性的研究具有较强的现实意义<sup>[1-5]</sup>.文献[6]采用非线性有限元、解析估算法对传统双塔单跨地锚式悬索桥的基频进行研究,指出可采用解析法求解该结构的基频;文献[7]采用 Rayleigh 法,在计入主塔刚度情况下,推导了三塔地锚式悬索桥竖向振动基频计算表达式;张超等<sup>[8]</sup>采用 Rayleigh 法在考虑中塔刚度影响下推导三塔自锚式悬索桥的振动基频,提出了主塔刚度影响系数的计算表达式;《公路桥梁抗风设计规范》<sup>[9]</sup>对简支单跨悬索桥的竖向弯曲的对称和反对称的基频做出说明,而未对自锚式斜拉-悬索协作体系桥的竖弯频率做出说明;文献[10]以自锚式斜拉-悬索协作体系桥为研究对象,采用广义大位移非线性弹性理论的广义变分原理,推导了自锚式斜拉-悬索协作体系桥的竖向振动基频表达式,但是该推导公式并未考虑主塔刚度对结构竖弯基频的影响.本文在考虑主塔刚度的影响下,采用 Rayleigh 法推导其相应的近似表达式,并讨论主塔刚度对其竖弯振动基频的影响程度,以供在自锚式斜拉-悬索协作体系桥概念设计或校对有限元计算结果.

## 2 基于 Rayleigh 法的竖向弯曲频率计算表达式

为简化公式推导,本文做出以下基本假设:

- 1) 所有材料的应力应变关系满足胡克定律.
- 2) 在成桥状态下,恒载沿跨度均匀分布,斜拉索为直线状,缆索为抛物线形状.
- 3) 吊杆和斜拉索是稠密的,吊杆可比拟为仅具有竖向抗力的均匀膜,不计吊杆的拉伸,斜拉索可比拟为仅具有轴向抗力的均匀膜,不计斜拉索的拉伸.
- 4) 假定缆索结构自由振动为静力平衡状态基础上的小幅度振动,整个过程结构刚度不变.
- 5) 加劲梁在主塔处为竖向支承的等截面连续梁,不计入竖曲线对加劲梁的影响.
- 6) 忽略主塔处的索鞍纵桥向变位对主缆线形的影响.

## 2.1 斜拉-悬索协作体系的势能

该体系在铅垂平面内一阶弯曲振动时,结构体系的势能为主缆、拉索、加劲梁及主塔的势能之和.

因主缆做微小振动,主缆的势能由边跨和主跨的主缆内力引起的弹性势能  $U_{ce}$  和主缆重力作用点变化引起的重力势能  $U_{cg}$  两部分组成.

主缆的弹性势能为

$$U_{ce} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{s1}}{E_c A_c} + \sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{s2}}{E_c A_c} \right) \quad (1)$$

$$l_{s2} = \int_0^{l_c} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx = l_c \left( 1 + \frac{16}{3} f_c^2 \right) \quad (2)$$

$$l_{s1} = \int_0^{l_s} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx = \frac{l_s}{\cos^2 \theta} \left( 1 + \frac{16}{3} f_s^2 \cos^4 \theta \right) \quad (3)$$

式中:  $H_i$  为第  $i$  跨主缆水平力的增量;  $l_{s2}$ 、 $l_{s1}$  分别为主、边跨的主缆虚拟长度;  $l_c$ 、 $l_s$  分别为主、边跨跨径;  $E_c$  和  $A_c$  分别为主缆的弹性模量和横截面积;  $f_c$ 、 $f_s$  分别为主、边跨的主缆的垂度;  $\theta$  为边跨主缆的水平倾角,如图 1 所示.

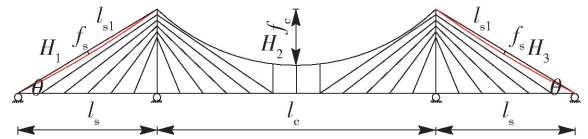


图 1 桥跨布置立面

Fig. 1 Side view of bridge span

主缆的重力势能为

$$U_{cg} = \frac{1}{2} H_q \int_L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4)$$

式中:  $H_q$  为重力作用下主缆的水平力;  $v$  为加劲梁的振型函数.

拉索的弹性势能为

$$U_{ci} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{E_{ci} A_{ci} v^2}{L_{ci}} \sin^2 \alpha_{ci} \quad (5)$$

式中:  $E_{ci}$ 、 $A_{ci}$ 、 $L_{ci}$ 、 $\alpha_{ci}$  分别为拉索的弹性模量、横截面积、长度、水平倾角.

加劲梁的弯曲势能为

$$U_{gs} = \frac{1}{2} \int_L E_g I_g \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (6)$$

式中:  $E_g$ 、 $I_g$  分别为加劲梁的弹模和抗弯刚度.

加劲梁的轴向压缩弹性势能为

$$U_{ge} = -\frac{1}{2} \int_L \frac{H_i^2}{E_g A_g} dx - \frac{1}{2} H_q \int_L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7)$$

式中  $A_g$  为加劲梁的截面积.

主塔的势能为

$$U_t = \sum_{i=1}^n \frac{(H_{i+1} - H_i)}{2S_{ti}} \quad (8)$$

式中:  $H_{i+1}$ 、 $H_i$  分别为  $i+1$ 、 $i$  号主跨的主缆的水平分力;  $S_{ti}$  为第  $i$  号主塔的纵向抗弯刚度.

于是, 该协作体系的势能为

$$U = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{s2}}{E_c A_c} + \sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{s1}}{E_c A_c} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{E_{ci} A_{ci} v^2}{L_{ci}} \sin^2 \alpha_{ci} + \frac{1}{2} \int_L E_g I_g \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_L \frac{H_i^2}{E_g A_g} dx + \sum_{i=1}^n \frac{(H_{i+1} - H_i)}{2 S_{ti}} \quad (9)$$

由式(9)分析可知, 在计入主塔刚度影响下, 边、主跨的主缆的水平分力  $H_i$  将不相等, 从而引起该结构体系势能的变化; 若不计入此影响, 则各主跨缆力是一致的.

## 2.2 斜拉-悬索协作体系的动能

该体系在铅垂平面内一阶弯曲振动时, 结构体系的动能为主缆、加劲梁、主塔及吊杆动能之和.

主缆的动能为

$$T_c = \frac{1}{2} \int_L m_c \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \quad (10)$$

式中  $m_c$  为主缆的单位桥长质量.

加劲梁的动能为

$$T_s = \frac{1}{2} \int_L m_g \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \quad (11)$$

$$\omega_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{s2}}{E_c A_c} + \sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{s1}}{E_c A_c} + \sum_{i=1}^n \frac{E_{ci} A_{ci} v^2}{L_{ci}} \sin^2 \alpha_{ci} + \int_L E_g I_g \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx - \int_L \frac{H_i^2}{E_g A_g} dx + \sum_{i=1}^n \frac{(H_{i+1} - H_i)}{S_{ti}}}{\int_L m_c \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \int_L m_s \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^n \frac{m_{ti}}{K_i^2} \left[ \frac{\partial (H_{i+1} - H_i)}{\partial t} \right]^2 + \sum_{i=1}^n m_{hi} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^n \frac{\omega_b^2}{3} m_{ci} v_{ci}^2 L_{ci}} \quad (16)$$

文献[15]研究指出, 在自锚式斜拉-悬索协作体系势能中, 主缆及拉索的弹性势能及加劲梁的弯曲势能在该结构体系势能中占主导地位, 因此其余构件的势能可忽略不计; 该体系动能中, 主塔及吊索的动能在结构总动能中所占比例很小, 故将其忽略不计, 因此, 在结构的动能中计入主缆及加劲梁的动能. 于是式(16)可简化为

$$\omega_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{s2}}{E_c A_c} + \sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{s1}}{E_c A_c} + \sum_{i=1}^n \frac{E_{ci} A_{ci} v^2}{L_{ci}} \sin^2 \alpha_{ci} + \int_L E_g I_g \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\int_L (m_c + m_g) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx} \quad (17)$$

## 3 自锚式斜拉-悬索协作体系的竖弯基本振型及变形协调条件

自锚式斜拉-悬索协作体系的一阶竖弯对称和非对

式中  $m_g$  为加劲梁的单位桥长质量.

主塔的动能为

$$T_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{m_{ti}}{K_i^2} \left[ \frac{\partial (H_{i+1} - H_i)}{\partial t} \right]^2 \quad (12)$$

式中  $m_{ti}$  为第  $i$  号主塔的质量.

吊索的动能为

$$T_{ri} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{hi} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \quad (13)$$

式中  $m_{hi}$  为第  $i$  号吊索的质量.

$$T_{ci} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_b^2}{6} m_{ci} v_{ci}^2 L_{ci} \quad (14)$$

式中  $m_{ci}$  为拉索的线均布质量.

于是, 该协作体系的动能为

$$T_c = \frac{1}{2} \int_L m_c \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_L m_s \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{m_{ti}}{K_i^2} \left[ \frac{\partial (H_{i+1} - H_i)}{\partial t} \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{hi} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^n \frac{\omega_b^2}{6} m_{ci} v_{ci}^2 L_{ci} \quad (15)$$

## 2.3 斜拉-悬索协作体系的竖弯频率计算表达式

自锚式斜拉-悬索协作体系桥的竖弯频率计算表达式为

称竖弯基本振型如图2、3所示.

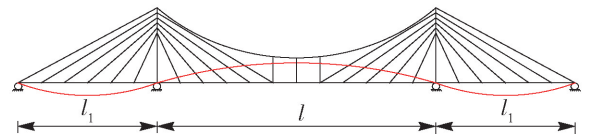


图2 一阶对称竖弯基本振型

Fig. 2 Mode shape of first symmetric vertical vibration

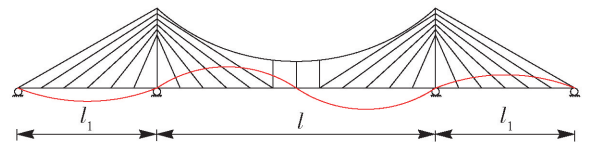


图3 一阶反对称竖弯基本振型

Fig. 3 Mode shape of first asymmetric vertical vibration

### 3.1 一阶对称竖弯基本振型及变形协调方程

由图2分析可知, 自锚式斜拉-悬索协作体系桥发生一阶对称竖弯振动时, 主跨间主缆的水平变

形量等于两端主塔顶水平位移量之差, 即

$$-2u - \frac{H_2 l_2}{E_g A_g} = \frac{H_2 l_{s2}}{E_c A_c} - \frac{q_2}{H_{q2}} \int_{l_2} v_2 dx \quad (18)$$

在竖向自由振动中, 主塔两侧主缆水平力之差通过主塔纵向弯曲变形来实现, 如图 4 所示. 由图 4 分析可知, 主塔两侧主缆水平增量之差等于主塔顶弹性反力, 即得到主塔的受力平衡方程.

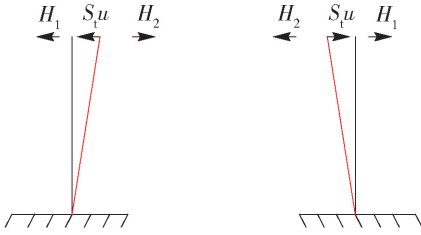


图 4 一阶对称主塔受力图

Fig. 4 Tower force in first symmetric vertical vibration

$$H_2 = H_1 + S_1 u \quad (19)$$

根据变形协调条件, 可得边跨变形协调方程为

$$u - \frac{H_1 l_1}{E_g A_g} = \frac{H_1 l_{s1}}{E_c A_c} - \frac{q_1}{H_{q1}} \int_{l_1} v_1 dx \quad (20)$$

由式 (18) ~ (20) 可得

$$H_1 = H_3 = \frac{\frac{q_2}{H_{q2}} \int_{l_2} v_2 dx + \frac{2q_1}{H_{q1}} \int_{l_1} v_1 dx}{\frac{2l_{s1}}{E_c A_c} + \frac{l_{s2}}{E_c A_c}} \quad (21)$$

$$H_2 = \frac{\frac{q_2}{H_{q2}} \int_{l_2} v_2 dx + \frac{2q_1}{H_{q1}} \int_{l_1} v_1 dx}{\frac{2l_{s1}}{E_c A_c} + \frac{l_{s2}}{E_c A_c}} - S_1 \frac{q_1}{H_{q1}} \int_{l_1} v_1 dx \quad (22)$$

### 3.2 一阶反对称竖弯基本振型及变形协调方程

由于自锚式斜拉-悬索协作体系桥将主缆锚固在加劲梁上, 自锚式悬索桥的加劲梁与主塔之间无纵向约束时, 由主梁两端受力平衡分析可知

$$H_1 = H_3 \quad (23)$$

根据变形协调原理, 可得主跨及边跨的变形协调方程为

$$-\frac{H_2 l_2}{E_g A_g} = \frac{H_2 l_{s2}}{E_c A_c} - \frac{q_2}{H_{q2}} \int_{l_2} v_2 dx \quad (24)$$

$$u - \frac{H_3 l_1}{E_g A_g} = \frac{H_3 l_{s3}}{E_c A_c} - \frac{q_3}{H_{q3}} \int_{l_1} v_1 dx \quad (25)$$

对于主塔, 主塔两侧主缆的水平力增量与主塔变形相互平衡如图 5 所示. 由图 5 分析可知, 主塔的受力平衡方程为

$$H_3 = H_2 - S_1 u \quad (26)$$

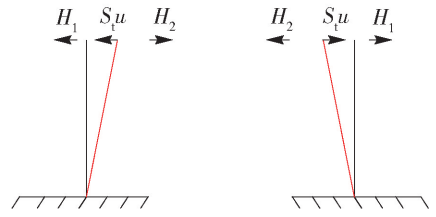


图 5 一阶反对称主塔受力图

Fig. 5 Tower force in first asymmetric vertical vibration

由式 (23) ~ (26) 可求得

$$H_2 = \frac{q_2}{H_{q2}} \int_{l_2} v_2 dx / \left( \frac{l_{s2}}{E_c A_c} + \frac{l_2}{E_g A_g} \right) \quad (27)$$

$$H_3 = H_1 = \left( \frac{q_2}{H_{q2}} \int_{l_2} v_2 dx / \left( \frac{l_{s2}}{E_c A_c} + \frac{l_2}{E_g A_g} \right) + S_1 \frac{q_3}{H_{q3}} \int_{l_1} v_1 dx \right) / \left( 1 + S_1 \frac{l_1}{E_g A_g} + S_1 \frac{l_{s3}}{E_c A_c} \right) \quad (28)$$

## 4 一阶对称竖弯频率计算式

加劲梁一阶对称振型关于中跨跨中对称, 如图 6 所示.

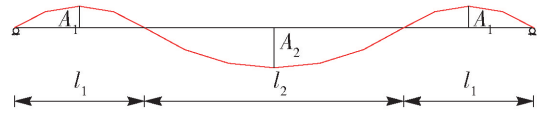


图 6 加劲梁一阶对称竖弯振型

Fig. 6 Mode shape of stiffening girder first symmetric vertical vibration

对于满足一阶对称竖弯振动, 分别设其满足边界条件的边、主跨加劲梁的振型函数.

边跨加劲梁的振型函数可表示为

$$v_1 = A_1 \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \sin (\omega t + \varphi), \quad x_1 \in (0, l_1) \quad (29)$$

主跨加劲梁的振型函数可表示为

$$v_2 = A_2 \sin \frac{\pi x_2}{l_2} \sin (\omega t + \varphi), \quad x_2 \in (l_1, l_1 + l_2) \quad (30)$$

主、边跨加劲梁的振型函数在桥塔处连续, 即满足变形协调条件, 可得

$$v'_1 |_{x_2=l_1} = v'_2 |_{x_2=l_1}$$

经简化, 可得

$$A_1 = -A_2 \frac{l_1}{l_2} = -k A_2 \quad (31)$$

于是, 可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{s2}}{E_c A_c} + \sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{s1}}{E_c A_c} = 4A_2^2 \left( \frac{l_2}{\pi} \right)^2 \frac{\lambda}{E_c A_c} \quad (32)$$

式中  $\lambda$  为主塔刚度影响系数.

$$\lambda = \left( \frac{8f_2}{l_2^2} - 16k^2 \frac{f_1}{l_1^2} + 8k^2 S_1 \frac{f_1}{l_1^2} \right) l_{s2} + 2 \left( \frac{8f_2}{l_2^2} - 16k^2 \frac{f_1}{l_1^2} \right) l_{s1} \quad (33)$$

$$A_2^2 \sum_{i=1}^n \frac{E_{ci} A_{ci} \sin^2 a_{ci}}{L_{ci}} \left( 2k^2 \sin^2 \frac{\pi x_1}{l_1} + \sin^2 \frac{\pi x_2}{l_2} \right) \quad (34)$$

$$\omega_b^2 = \frac{4 \left( \frac{l_2}{\pi} \right)^2 \frac{\lambda}{E_c A_c} + \sum_{i=1}^n \frac{E_{ci} A_{ci} \sin^2 a_{ci}}{L_{ci}} \left( 2k^2 \sin^2 \frac{\pi x_1}{l_1} + \sin^2 \frac{\pi x_2}{l_2} \right) + E_g I_g \frac{\pi^4}{l_2^3} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \right)}{(m_c + m_g) l_2 \left( k^3 + \frac{1}{2} \right)} \quad (37)$$

## 5 一阶反对称竖弯频率计算式

加劲梁一阶反对称振型关于中跨跨中反对称,如图7所示.

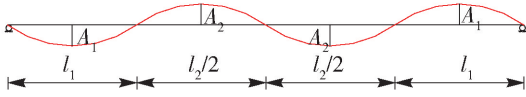


图7 加劲梁一阶反对称竖弯振型

Fig. 7 Mode shape of stiffening girder first asymmetric vertical vibration

对于满足一阶反对称竖弯振动,分别设其满足边界条件的边、主跨加劲梁的振型函数.

边跨加劲梁的振型函数可表示为

$$v_1 = A_1 \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \sin(\omega t + \varphi), \quad x_1 \in (0, l_1) \quad (38)$$

主跨加劲梁的振型函数可表示为

$$v_2 = A_2 \sin \frac{2\pi x_2}{l_2} \sin(\omega t + \varphi), \quad x_2 \in (l_1, l_1 + l_2) \quad (39)$$

主、边跨加劲梁的振型函数在桥塔处连续,即满足变形协调条件,可得

$$v_1' |_{x_1=l_1} = v_2' |_{x_2=l_1}$$

经简化可得

$$A_1 = -2A_2 \frac{l_1}{l_2} = -2kA_2 \quad (40)$$

于是,可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{ce}}{E_c A_c} + \sum_{i=1}^n \frac{H_i^2 l_{se}}{E_c A_c} = 0 \quad (41)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{E_{ci} A_{ci} v^2}{L_{ci}} \sin^2 \alpha_{ci} =$$

$$E_g I_g \int_L \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = E_g I_g A_2^2 \frac{\pi^4}{l_2^3} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \right) \quad (35)$$

$$(m_c + m_g) \int_L \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx = (m_c + m_g) A_2^2 l_2 \left( k^3 + \frac{1}{2} \right) \quad (36)$$

将式(32)~(36)代入式(17),可得该协作体系的一阶竖弯对称基频的表达式为

$$A_2^2 \sum_{i=1}^n \frac{E_{ci} A_{ci} \sin^2 a_{ci}}{L_{ci}} \left( 8k^2 \sin^2 \frac{\pi x_1}{l_1} + \sin^2 \frac{2\pi x_2}{l_2} \right) \quad (42)$$

$$E_g I_g \int_L \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = E_g I_g A_2^2 \frac{\pi^4}{l_2^3} \left( \frac{4}{k} + 8 \right) \quad (43)$$

$$(m_c + m_g) \int_L \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx = A_2^2 (m_c + m_g) l_2 \left( 4k^3 + \frac{1}{2} \right) \quad (44)$$

将式(41)~(44)代入式(17),可得该协作体系的一阶竖弯反对称基频的表达式为

$$\omega_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_{ci} A_{ci} \sin^2 a_{ci}}{L_{ci}} \left( 8k^2 \sin^2 \frac{\pi x_1}{l_1} + \sin^2 \frac{2\pi x_2}{l_2} \right) + E_g I_g \frac{\pi^4}{l_2^3} \left( \frac{4}{k} + 8 \right)}{(m_c + m_g) l_2 \left( 4k^3 + \frac{1}{2} \right)} \quad (45)$$

## 6 算例分析

为验证本文所推导的公式的有效性,现以文献[15]中的算例进行算例验证.该桥为自锚式斜拉-悬索协作体系桥,其跨径布置为41.6 m + 100 m + 41.6 m,矢跨比为1/5.2,构件材料特性及截面特性如表1所示,计算结果如表2所示.

算例分析表明,本文算法比文献[15]计算斜拉-悬索协作体系的竖向弯曲振动基频的算法的计算精度得到进一步提高,2种计算方法计算精度存在差异的主要原因是由于本文算法计入主塔刚度引起索力变化.其中,一阶竖弯对称的计算精度比一阶反对称的计算精度要高,其根本原因是该体系低阶反对称竖向振动与纵飘振动耦合.由文献[15]求解过程中不难发现,该体系桥梁振动方程中存在耦

表1 构件材料特性和截面特性

Table 1 Material and section properties of structure components

构件	$E/$ (GN·m <sup>-1</sup> )	$A/\text{dm}^2$	$I/\text{m}^4$	$Q/$ (kN·m <sup>-1</sup> )
主缆	195.0	1.669 0	0.00	1.40
斜拉索	195.0	0.350 2	0.00	0.29
吊杆	195.0	0.211 7	0.00	0.18
加劲梁	34.5	902.000 0	3.06	234.52
主塔	34.5	685.000 0	7.08	178.10

注: $E$ 为弹性模量; $A$ 为截面积; $I$ 为竖向抗弯惯性矩; $Q$ 为荷载集度。

表2 解析解与数值解计算结果比较

Table 2 Contrast for results of analytic and numerical solution

振型	$\omega/\text{Hz}$			误差	
	有限元解	文献[15]解	本文解	1/%	2/%
$f_v^s$	0.893 5	1.027 0	0.945 1	14.9	5.7
$f_v^a$	0.575 5	0.645 1	0.623 3	12.1	8.3

注: $f_v^s$ 为一阶对称竖弯频率; $f_v^a$ 为一阶反对称竖弯频率;误差1为文献[15]与有限元解的误差;误差2为本文解与有限元解的误差。

合项,在文献[15]解与本文解中均忽略了耦合项,即该体系在做振动时仅仅视为竖向弯曲振动而忽略纵飘振动,从而使得本文解与有限元解存在一定差异,但是本文解相对文献[15]解的计算精度得到进一步提高。

## 7 结论

1) 在计算自锚式斜拉-悬索协作体系桥梁竖向弯曲振动基频时,其动力特性是由主缆、斜拉索及加劲梁决定的。换言之,该结构体系的竖弯振动基频比同等结构布置的自锚式悬索桥的竖向弯曲振动基频略高,其原因是由斜拉索自由振动引起的。

2) 主塔刚度对该体系的一阶对称竖弯频率影响较大,进行此频率计算时应计入主塔刚度的影响,而对一阶反对称竖弯无影响。

3) 通过假设加劲梁的振型函数,推导了该体系的竖弯振动频率计算表达式,可用于该体系桥梁的概念设计或有限计算校核。

4) 所推导的竖弯振动计算表达式仅适用于塔梁支承体系的自锚式斜拉-悬索协作体系桥梁的

竖弯基频计算,不适用于其他结构体系的竖弯基频估算。

## 参考文献:

- [1] LIU M F, CHANG T P, ZENG D Y. The interactive vibration behavior in a suspension bridge system under moving vehicle loads and vertical seismic excitations [J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 35(1): 398-411.
- [2] KONSTANTAKOPOULOS T, RAFTOYIANNIS I G, MICHALTSOS G T. Suspended bridges subjected to earthquake and moving loads [J]. Engineering Structures, 2012, 45(2248): 223-237.
- [3] WESTGATE R, KOO K Y, BROWNNJOHN J, et al. Suspension bridge response due to extreme vehicle loads [J]. Structure and Infrastructure Engineering, 2014, 10(10): 821-833.
- [4] FEN D, SUN H, FENG M Q. Simultaneous identification of bridge structural parameters and vehicle loads [J]. Computer and Structure, 2015, 157, 76-88.
- [5] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2002.
- [6] 肖汝诚. 吊桥结构自振频率的计算方法[J]. 华东公路, 1991(1): 54-58.  
XIAO R C. Method to calculate natural vibration frequency of suspension bridges [J]. East China Highway, 1991(1): 54-58. (in Chinese)
- [7] 姜洋. 三塔悬索桥结构体系及施工过程关键问题研究[D]. 上海: 同济大学, 2014.  
JIANG Y. Study for structure system and process of construction for three-tower suspension bridge [D]. Shanghai: Tongji University, 2014. (in Chinese)
- [8] 张超, 黄群君, 许莉. 考虑主塔刚度影响的三塔自锚式悬索桥竖弯频率计算公式[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2014, 34(6): 100-106.  
ZHANG C, HUANG Q J, XU L. Frequency formulas for vertical vibration of three-tower self-anchored suspension bridge considering tower stiffness influence [J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2014, 34(6): 100-106. (in Chinese)
- [9] 中华人民共和国交通部. 公路桥梁抗风设计规范: JTG/T D60-01—2004[S]. 北京: 人民交通出版社, 2004.
- [10] 苗峰. 自锚式斜拉-悬索协作体系桥动力学问题研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2010.  
MIAO F. Study on dynamic problems for self-anchored cable-stayed suspension bridge [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2010. (in Chinese)

(责任编辑 郑筱梅)