

# 基于子结构的内力约束连续体拓扑优化

杜家政<sup>1</sup>, 马笑辉<sup>1</sup>, KIM Namho<sup>2</sup>

(1. 北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124; 2. University of Florida, Gainesville, FL 32611, USA)

**摘要:** 通过拓扑优化可以得到传力路径, 不同传力路径对应不同内力载荷. 如果将内力载荷作为目标或约束进行拓扑优化, 可以得到满足不同需求的传力路径, 为拓扑优化的发展提供新思路和新方法. 为了得到不同内力载荷需求的传力路径, 基于子结构法将结构分开使内力暴露出来. 以结构质量最小为目标, 以内力为约束建立拓扑优化模型. 基于独立、连续、映射(independent, continuous, mapping, ICM)方法和单位载荷法将内力显式化, 通过累加获得需要控制的传力路径上的内力, 通过迭代调整2个路径上的内力使其比值达到一个稳定的值, 从而获得满足内力约束的传力路径. 算例表明: 不同的内力约束可以得到不同的传力路径.

**关键词:** 拓扑优化; 灵敏度分析; 传力路径; 内力约束; 连续体结构

中图分类号: O 343.1

文献标志码: A

文章编号: 0254-0037(2016)12-1818-04

doi: 10.11936/bjtxb2016080006

## Topology Optimization for Continuous Structures With Internal Force Constraints Based on the Substructure

DU Jiazheng<sup>1</sup>, MA Xiaohui<sup>1</sup>, KIM Namho<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124;  
2. University of Florida, Gainesville, FL 32611, USA)

**Abstract:** The loading paths can be obtained with the topology optimization and different loading paths are related to different internal forces. Taking the internal forces as the object or constraint, the loading paths can be obtained to meet the various demands with the topology optimization, which provides new ideas and new methods for the development of topology optimization research. To obtain the loading paths with different internal force requirements, the structures can be separated to expose the internal forces based on substructure method. A topology optimization model was established to minimize the weight with internal force as constraint. The internal force was explicit with the independent, continuous, mapping (ICM) method and the unit load method. The internal forces were added to get the total internal force on the controlled loading paths. The ratio of the internal forces on two loading paths reached a stable value by iteration to obtain the loading path meeting the internal force constraint. The numerical examples show that different loading paths can be obtained with different internal force constraints.

**Key words:** topology optimization; sensitivity analysis; loading paths; internal force constraint; continuous structures

收稿日期: 2016-08-02

基金项目: 北京市教育委员会资助项目(KM201110005014); 北京市科协金桥工程种子资金资助项目(ZZ16001); 国外访问学者研修培训资助项目(067145301400)

作者简介: 杜家政(1975—), 男, 副教授, 主要从事计算力学及结构优化方面的研究, E-mail: djz@bjut.edu.cn

美国航空事故分析报告显示最近 30 年的航空事故中超过 2/3 的事故是由于载荷分析不足引起的,设计者的注意力更多关注强度、刚度、稳定性等,而忽视导致事故高发的内力载荷. 通过拓扑优化可以得到传力路径,不同传力路径对应不同内力载荷. 如果将内力载荷作为目标或约束进行拓扑优化可以得到满足不同需求的传力路径,为拓扑优化的发展提供新思路和新方法,具有重要的理论意义和工程价值.

拓扑优化是以单元为拓扑变量,对于大型结构,拓扑变量随着单元数的增多而增多,导致求解困难. 借助子结构的思想,可以将复杂结构分解为多个子结构,分别进行优化,最后达到优化整个结构的目的. 张帆等<sup>[1]</sup>在客车拓扑优化中引入子结构法,将不进行优化的部分凝聚为超单元参与拓扑优化分析,大大地提高了优化效率. 张保等<sup>[2]</sup>基于子结构法对大型结构进行数值敏感度计算,通过节点重排将与设计变量有关的节点位移排到总位移列阵序的后面,对其进行区域分块、聚缩,得到规模较小的矩阵,显著提高了计算效率. 袁康等<sup>[3]</sup>基于子结构法将大型冶金铸造起重机划分为三级子结构,重点突出了六大结构件,实现了整机三维有限元模型完整性和准确性.

子结构法可以用来解决大规模问题、提高效率,本文采用子结构的另一个目的是将结构分开使内力暴露出来,便于内力作为优化的约束条件或目标函数进行控制. 隋允康<sup>[4]</sup>在 1996 年提出独立、连续、映射 (independent, continuous, mapping, ICM) 方法,将拓扑变量从依附于面积、厚度等尺寸优化层次的变量中抽象出来,恢复了拓扑变量的独立性,通过引入过滤函数将离散拓扑变量转换为连续拓扑变量. 在大量研究成果积累的基础上,2013 年隋允康等<sup>[5]</sup>完善了连续体拓扑优化的 ICM 方法. Lee 等<sup>[6]</sup>采用伴随法对内力进行敏感度分析,采用拓扑优化的方法将内力作为约束进行传力路径的优化设计,在不同内力约束下得到了不同的拓扑结构.

为了得到不同内力载荷需求的传力路径,基于子结构法将结构分开使内力暴露出来. 以结构质量最小为目标,以内力为约束建立拓扑优化模型,通过累加获得需要控制的传力路径上的内力,通过迭代调整 2 个路径上的内力使其比值达到一个稳定的值,从而获得满足内力约束的传力路径.

## 1 子结构的分解与连接

将整体结构(见图 1(a))分解为 2 个区域子结构 I 和子结构 II,分界面通过内力连接(见图 1(b)). 子结构 II 为自由体,无法进行有限元分析,将内力用接地弹簧代替(见图 1(c)),给接地弹簧一个初始刚度  $k_i^{(v)}$  (下标为分量、上标为迭代次数),对子结构 II 进行有限元分析,得到弹簧力  $F_i^{(v)}$ . 将该弹簧力作为外力施加在子结构 I 相对应的位置,对子结构 I 进行有限元分析,得到分界面的位移  $u_i^{(v)}$ . 根据位移和弹簧力计算弹簧刚度  $k_i^{(v+1)} = F_i^{(v)} / u_i^{(v)}$ ,修正子结构 II 的弹簧刚度. 通过反复迭代,使分界面的变形协调一致. 这样分析得到的结果,与整体分析得到的结果一致.

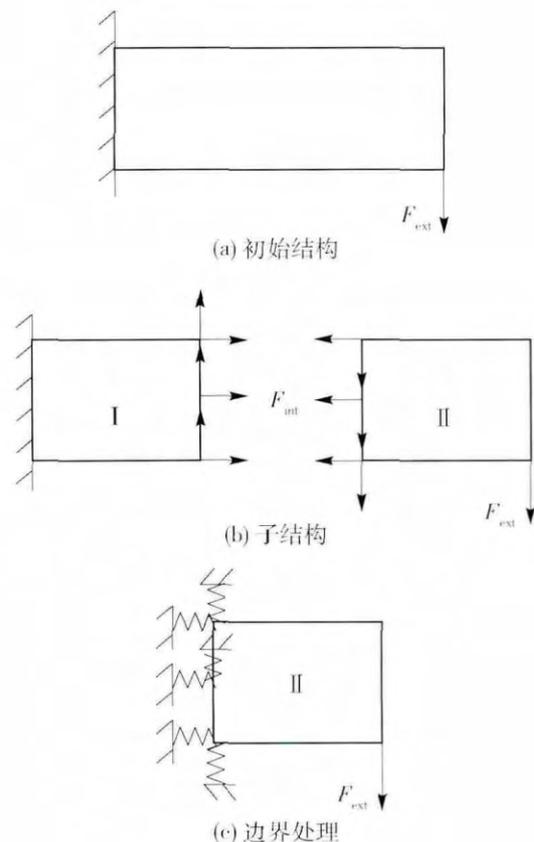


图 1 子结构的分解与连接

Fig. 1 Separation and connection of substructure

## 2 内力约束的拓扑优化模型

通过拓扑优化可以得到传力路径,传力路径可能是 1 条,也可能是几条. 相同约束条件下,传力路径是固定的,不同传力路径上内力也是平衡的. 如果想增大或减小某个传力路径上的内力,或者让 2

个路径上的内力保持比例关系,拓扑结构将重新分布,得到满足内力约束的拓扑结构.

以结构质量最小为目标,以2个指定路径上内力保持比例关系为约束进行拓扑优化,优化模型如下:

$$\begin{cases} \text{求} & t_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ \text{使} & \sum_i^N w_i(t_i) \rightarrow \min \\ \text{s. t.} & F_1(t_i)/F_2(t_i) = n \\ & 0 \leq t_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $t_i$  为拓扑变量;  $N$  为拓扑变量的个数(即单元个数);  $w_i$  为单元质量(是拓扑变量的函数);  $F_1$  和  $F_2$  为2个传力路径上的内力(根据网格划分粗细不同,内力可能是几个节点内力的代数和);  $n$  为2个传力路径上内力的比例因子.

节点内力的显式化是问题的关键,根据有限元理论,以平面单元为例进行推导,单元的节点力可以表示为

$$F_e^i = \sum_{j=1}^8 k_e^{ij} u_e^j \quad (2)$$

式中:  $F_e^i$  为  $e$  单元  $i$  方向的节点力;  $k_e^{ij}$  为  $e$  单元的刚度;  $u_e^j$  为  $e$  单元的节点位移.

根据单位虚载荷法<sup>[7]</sup>,节点位移  $u_e^j$  可以表示为

$$u_e^j = \sum_{k=1}^N (F_k^R u_k^V)^j \quad (3)$$

式中:  $F_k^R$  为  $k$  号单元在实工况下的单元节点力向量;  $u_k^V$  为单位载荷下的  $k$  号单元节点位移向量;  $N$  为单元总数.

根据 ICM 方法<sup>[5,8]</sup>得到内力的显式表达式为

$$F_e^i = \sum_{j=1}^8 \left\{ k_e^{ij(0)} f_k(t_e) \sum_{k=1}^N [(F_k^R u_k^V)_e^j / f_k(t_k)] \right\} \quad (4)$$

式中  $f_k(t_k)$  为单元刚度矩阵的过滤函数.

取  $f_k(t_k) = t_k^2$ ,通过推导得到内力对拓扑变量的一阶泰勒展式,通过累加得到内力约束的显式表达式.

### 3 算例

60 mm × 32 mm 的基结构,左侧边界固支,右侧边界中间受到向下的集中力载荷  $P$ ,如图2所示.以结构质量最小为目标,只考虑了应力约束,不考虑内力约束的情况下,采用同样的拓扑优化方法,分别按整体拓扑优化(见图2(a))和子结构拓扑优化

(见图2(b))进行优化,得到基本相同的拓扑结构,如图3所示.采用子结构拓扑优化,同时能得到分界面的内力.随着网格精度和收敛精度的增加,拓扑优化的结果趋于一致.

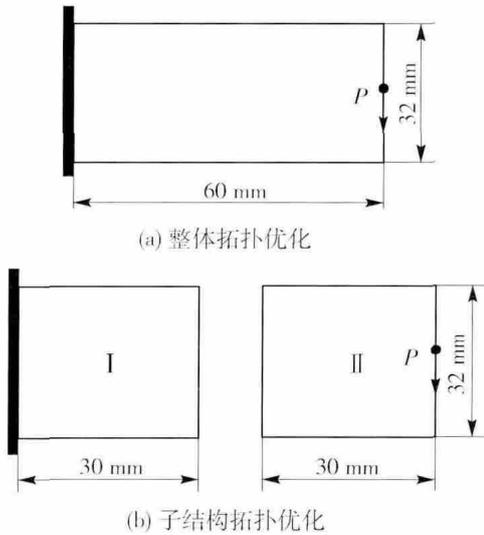


图2 拓扑优化基结构

Fig. 2 Base structures of topology optimization

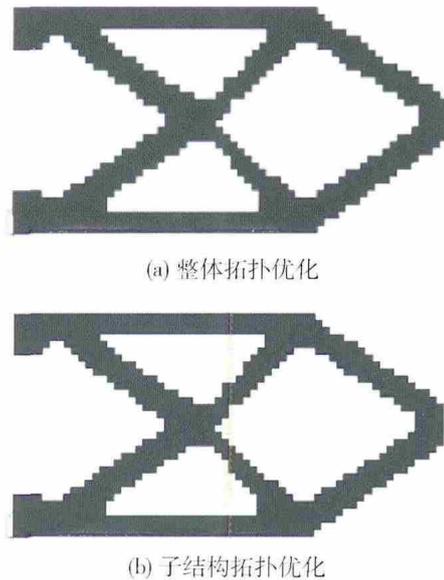


图3 没有内力约束的拓扑优化结果

Fig. 3 Topology optimization results without internal force constrained

在不考虑内力约束的情况下,上下边界存在2个传力路径.根据平衡条件,2个传力路径上的内力相同.

增加内力约束,上边界与下边界的内力比分别是1:2、1:4、1:6、1:8的情况下,以重量最小为目标分别进行优化,优化结果如图4所示.

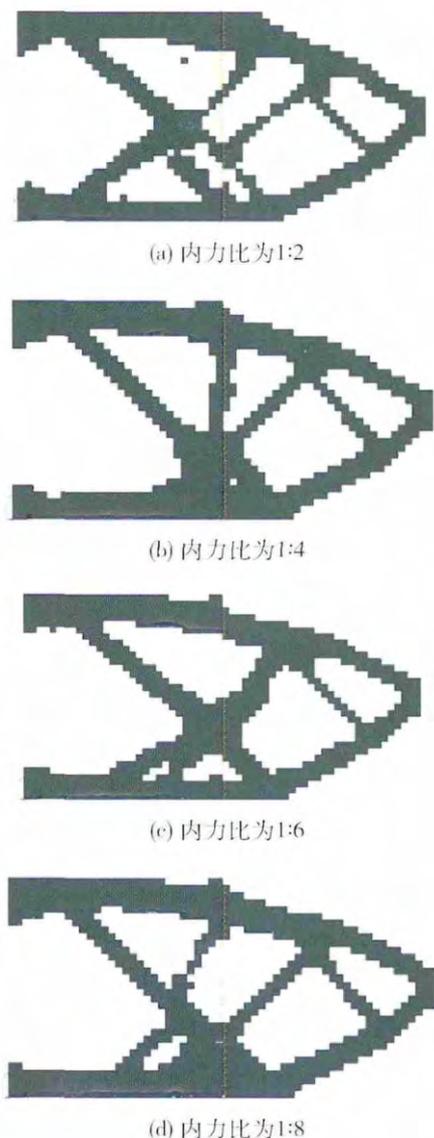


图4 有内力约束的拓扑优化结果

Fig. 4 Topology optimization results with internal force constrained

## 4 结论

1) 采用子结构法将结构分为多个子结构进行优化,可以得到相同的拓扑结构,可用于解决大模型拓扑优化问题,还可以将内力暴露出来,为内力约束的拓扑优化奠定基础。

2) 不同的内力约束下,可以得到不同的拓扑结构,随着内力比的增大,内力大的传力路径明显变得粗壮,结构向内力大的传力路径方向偏移。

3) 将内力作为约束进行拓扑优化,能控制结构

内力的重新分配,根据实际需要调整传力路径上的内力。

## 参考文献:

- [1] 张帆,刚宪约,柴山,等. 基于载荷等效和子结构法的客车复合工况拓扑优化方法[J]. 机械设计,2013,30(3): 62-67.  
ZHANG F, GANG X Y, CHAI S, et al. Topology optimization method of passenger car composite condition based on load equivalent and substructure method [J]. Journal of Machine Design, 2013, 30(3): 62-67. (in Chinese)
- [2] 张保,孙秦. 基于子结构法的大型结构数值敏度计算技术[J]. 航空工程进展,2014,5(4): 475-480.  
ZHANG B, SUN Q. Numerical sensitivity analysis of large structures based on substructure method [J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2014, 5(4): 475-480. (in Chinese)
- [3] 袁康,付群峰,屈小章,等. 大型复杂起重机械结构三维有限元子结构模型分析[J]. 机械设计与制造,2015(3): 14-18.  
YUAN K, FU Q F, QU X Z, et al. Three dimensional finite element substructure model analysis of the large and complicated crane structure [J]. Machinery Design & Manufacture, 2015(3): 14-18. (in Chinese)
- [4] 隋允康. 建模·变换·优化——结构综合方法新进展[M]. 大连: 大连理工大学出版社,1996: 177-195.
- [5] 隋允康,叶红玲. 连续体结构拓扑优化的 ICM 方法[M]. 北京: 科学出版社,2013: 26-59.
- [6] LEE S, KIM N, JOO J. Load-path design and control using topology optimization [EB/OL]. [2016-05-20]. <http://web.aeromech.usyd.edu.au/WCSMO2015/abstracts/1310.pdf>.
- [7] SUI Y K, DU J Z, GUO Y Q. Independent continuous mapping for topological optimization of frame structures [J]. Acta Mechanica Sinica, 2006, 22(6): 611-619.
- [8] 隋允康,彭细荣. 连续体结构考虑离散性目标的 ICM 方法[J]. 计算力学学报,2006,23(2): 163-168.  
SUI Y K, PENG X R. ICM method with objective transformed by variable discrete condition for continuum structure [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(2): 163-168. (in Chinese)

(责任编辑 杨开英)