Δ-结合代数的 Green 环

苏　冬, 杨士林
(北京工业大学应用数理学院, 北京　100124)

摘　要: 为了研究有限维 Δ-结合代数的 Green 环,首先引入 2 类由八维半单 Hopf 代数扩张而得的有限维 Δ-结合代数,然后引入有限维 Δ-结合代数的 Green 环的概念,给出这 2 类有限维 Δ-结合代数的 Green 环的生成元和生成关系,从而确定了它们的结构.

关键词: 弱 Hopf 代数; Δ-结合代数; Green 环; Hopf 代数
中图分类号: O 153.3　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 0254 - 0037(2017)08 - 1275 - 08
doi: 10.11936/bjutxb2016070014

Green Rings of the Δ-associative Algebras

SU Dong, YANG Shilin
(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: To study the Green rings of finite dimensional Δ-associative algebras, firstly, two classes of finite dimensional Δ-associative algebras were introduced by expanding eight dimension semisimple Hopf algebras. Then by generalizing the definition of the Green rings of the Hopf algebras to the Δ-associative algebras, the Green rings of the two classes of finite dimensional Δ-associative algebras and the structure were determined by the generators and relations.

Key words: weak Hopf algebras; Δ-associative algebras; Green rings; Hopf algebras

设$\mathbb{C}$ 为复数域,$M_n(\mathbb{C})$表示域$\mathbb{C}$ 上 $n\times n$ 矩阵组成的全矩阵代数,除特殊说明外文中的代数、Hopf 代数和$\otimes$均定义在复数域$\mathbb{C}$ 上,所有模均是在复数域$\mathbb{C}$ 上有限维结合代数的左模.

作为 Hopf 代数的一种推广,1998 年 Li[1] 引入了弱 Hopf 代数的概念,随后他和 Duplij[2] 给出 2 个弱 Hopf 代数的例子,它们是由 $U_q(sl_2)$ 扩张而成的弱 Hopf 代数. 2005 年 Yang 在文献[3]中给出了对应于 Cartan 矩阵的弱 Hopf 代数以及它们的 PBW 基. Cheng 等[4-5] 进一步考虑了对应于 $U_q(sl_2)$ 的弱 Hopf 代数,然后将相关结果推广到对应于 $U_q(sl_n)$ 的弱 Hopf 代数上,Cheng[6] 用同样的方法研究了相应于 Sweedler 代数的弱 Hopf 代数.

近年来,关于 Hopf 代数的 Green 环的研究日渐兴起并成为热点. Chen 等在文献[7]中考虑了 Taft 代数 $H_n(q)$ 的 Green 环 $r(H_n(q))$ 的生成元和生成关系;Li 等[8] 在文献[7]的基础上确定了广义 Taft Hopf 代数 $H_{n,d}(q)$ 的 Green 环 $r(H_{n,d}(q))$ 的结构,给出了它的所有幂零元的表达式. 实际上,若一个有限维结合代数 A 带有一个代数同态 $\Delta: A\to A\otimes A$,并且满足 $(\Delta\otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta$(称 A 为 Δ-结合代数),那么同样可以定义 A 的 Green 环或表示环. 研究 Δ-结合代数的 Green 环是一项很有意义的工作.

本文主要考虑 2 类特殊的有限维 Δ-结合代数的 Green 环,这 2 类代数均是由唯一的非交换非余交换的八维半单 Hopf 代数 H_8 扩张而得. 首先回顾

收稿日期: 2016-07-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271043,11471186); 北京市自然科学基金资助项目(1162002)
作者简介: 苏　冬(1982—), 女, 博士研究生, 主要从事量子群及表示方面的研究, E-mail: ynsudong@126.com

H_8 的定义并给出它的一些性质. 然后,把 H_8 扩张成一个弱 Hopf 代数 $\widetilde{H}_8$(Li 定义下的弱 Hopf 代数),并确定了 $\widetilde{H}_8$ 的 Green 环 $r(\widetilde{H}_8)$ 的生成元和生成关系. 最后,把 H_8 扩张成一个 Δ-结合代数 $\hat{H}_8$,它不是一个弱 Hopf 代数. 引入 Δ-结合代数 Green 环的定义并考虑 $\hat{H}_8$ 的 Green 环结构,注意到它不含单位元.

1 预备知识

与 Hopf 代数相关的理论和知识可参见文献[9].

定义 1 设 A 是一个带有代数同态 $\Delta: A\to A\otimes A$ 的有限维结合代数,若 $(\Delta\otimes \mathrm{id})\Delta=(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta$,则称 A 为 Δ-结合代数.

注意到所有的 Hopf 代数、双代数均是 Δ-结合代数. 设 A 为 Δ-结合代数,沿用 Sweedler 记号,任意的 $a\in A$ 记 $\Delta(a)=\sum\limits_{(a)} a_{(1)}m\otimes a_{(2)}n$,设 M 和 N 是 2 个 A-模,任意的 $m\in M, n\in N, a\in A$,定义 $a\cdot(m\otimes n)=\sum\limits_{(a)} a_{(1)}m\otimes a_{(2)}n$,则 $M\otimes N$ 也是 A-模. 记 A-模 M 的同构类为 $[M]$,$R(A)$ 是由所有的 $[M]$ 生成的自由 Abel 群,对任意 A-模 M 和 N,在 $R(A)$ 上定义

$$[M][N]=[M\otimes N]$$

容易验证该乘法满足结合律和左、右分配律,从而 $R(A)$ 是环;该环模去所有关系式

$$[M\oplus N]-[M]-[N]$$

所得的商环称为代数 A 的表示环或 Green 环,记为 $r(A)$.

Hopf 代数 H_8 的定义和性质可参阅文献[10].

H_8 是唯一的非交换非余交换的八维半单 Hopf 代数,它由 s、t、c 生成,且满足

$$s^2=1, t^2=1$$

$$st=ts, cs=tc, sc=ct$$

$$c^2=\frac{1}{2}(1+s+t-st)$$

其余代数结构为

$$\Delta(s)=s\otimes s,\ \Delta(t)=t\otimes t$$

$$\Delta(c)=\frac{1}{2}(1\otimes 1+1\otimes s+t\otimes 1-t\otimes s)(c\otimes c)$$

$$\varepsilon(s)=\varepsilon(t)=\varepsilon(c)=1$$

对极为

$$S(s)=s^{-1}, S(t)=t^{-1}, S(c)=c$$

容易知道 H_8 有一组基为 $\{1,s,t,c,st,cs,sc,cst\}$,并且

$$H_8\cong\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus M_2(\mathbb{C})$$

所以 H_8 的所有不可约模即为不可分解模.

引理 1 Hopf 代数 H_8 有 4 个不同构的一维不可约模 $S_m(m\in\mathbb{Z}_4)$,和 1 个二维的不可约模 S,它们的 H_8-模结构为

$$S_m:\ s\cdot v^{(m)}=(-1)^m v^{(m)}$$

$$t\cdot v^{(m)}=(-1)^m v^{(m)}$$

$$c\cdot v^{(m)}=\mathrm{i}^m v^{(m)}, v^{(m)}\in S_m$$

$$S:\ s\cdot v_j=(-1)^j v_j$$

$$t\cdot v_j=(-1)^{j+1} v_j$$

$$c\cdot v_j=v_{3-j}, v_j\in S, j=1,2$$

证明 直接验证.

引理 2 作为 H_8-模,有下面结论:

1) 如果 $m+m'(m,m'\in\mathbb{Z}_4)$ 为奇数,那么 $S_m\otimes S_{m'}\cong S_{m+m'(\mathrm{mod}4)}$;如果 $m+m'$ 为偶数,那么 $S_m\otimes S_m'\cong S_{m-m'(\mathrm{mod}4)}$.

2) $S\otimes S_m\cong S_m\otimes S\cong S, S\otimes S\cong\bigoplus\limits_m S_m$.

证明 沿用引理 1 的记号.

1) 假设 $\{v^{(m)}\otimes v^{(m')}\}$ 是 $S_m\otimes S_{m'}$ 的一组基,其中 $v^{(m)}\in S_m, v^{(m')}\in S_{m'}$,那么 $S_m\otimes S_{m'}$ 作为 H_8-模有

$$s\cdot(v^{(m)}\otimes v^{(m')})=(-1)^{m+m'}(v^{(m)}\otimes v^{(m')})=(-1)^{m-m'}(v^{(m)}\otimes v^{(m')})$$

$$t\cdot(v^{(m)}\otimes v^{(m')})=(-1)^{m+m'}(v^{(m)}\otimes v^{(m')})=(-1)^{m-m'}(v^{(m)}\otimes v^{(m')})$$

当 $m+m'$ 为奇数时

$$c\cdot(v^{(m)}\otimes v^{(m')})=\mathrm{i}^{m+m'}(v^{(m)}\otimes v^{(m')})$$

当 $m+m'$ 为偶数时

$$c\cdot(v^{(m)}\otimes v^{(m')})=\mathrm{i}^{m-m'}(v^{(m)}\otimes v^{(m')})$$

因此如果 $m+m'$ 为奇数,那么

$$S_m\otimes S_{m'}\cong S_{m+m'(\mathrm{mod}4)}$$

如果 $m+m'$ 为偶数,那么

$$S_m\otimes S_{m'}\cong S_{m-m'(\mathrm{mod}4)}$$

2) 假设 $\{v^{(m)}\otimes v_j\}$ 和 $\{v_j\otimes v^{(m)}\}$ 分别是 $S_m\otimes S$ 和 $S\otimes S_m$ 的一组基,其中 $v^{(m)}\in S_m, v_j\in S, j=1,2$. 那么 $S_m\otimes S$ 和 $S\otimes S_m$ 作为 H_8-模有

$$s\cdot(v^{(m)}\otimes v_j)=(-1)^{m+j}(v^{(m)}\otimes v_j)$$

$$t\cdot(v^{(m)}\otimes v_j)=(-1)^{m+1+j}(v^{(m)}\otimes v_j)$$

当 $m-j$ 为奇数时

$$c\cdot(v^{(m)}\otimes v_j)=\mathrm{i}^{-m}(v^{(m)}\otimes v_{3-j})$$

当 $m-j$ 为偶数时

$$c\cdot(v^{(m)}\otimes v_j)=\mathrm{i}^{m}(v^{(m)}\otimes v_{3-j})$$

而且

$$s\cdot(v_j\otimes v^{(m)})=(-1)^{m+j}(v_j\otimes v^{(m)})$$

$$t\cdot(v_j\otimes v^{(m)})=(-1)^{m+1+j}(v_j\otimes v^{(m)})$$

当 $m-j$ 为奇数时

$$c\cdot(v_j\otimes v^{(m)})=\mathrm{i}^m(v_{3-j}\otimes v^{(m)})$$

当 $m-j$ 为偶数时

$$c\cdot(v_j\otimes v^{(m)})=\mathrm{i}^{-m}(v_{3-j}\otimes v^{(m)})$$

显然 $m=0$ 时，$S\otimes S_0\cong S_0\otimes S\cong S$.

当 $m=1$ 时，令

$$w_1=\mathrm{i}v^{(1)}\otimes v_2,w_2=v^{(1)}\otimes v_1$$

容易验证 $\{w_1,w_2\}$ 也是 $S_1\otimes S$ 的一组基，并且有

$$s\cdot w_k=(-1)^k w_k$$

$$t\cdot w_k=(-1)^{k+1}w_k$$

$$c\cdot w_k=w_{3-k},k=1,2$$

所以 $S_1\otimes S\cong S$，类似方法可证 $S\otimes S_1\cong S$. 同理可得 $m=2$、$m=3$ 时的情形. 所以

$$S\otimes S_m\cong S_m\otimes S\cong S$$

假设 $\{v_j\otimes v_{j'}\}$ 是 $S\otimes S$ 的一组基，其中 $v_j,v_{j'}\in S$，$j,j'=1,2$. 那么 $S\otimes S$ 作为 H_8-模有

$$s\cdot(v_j\otimes v_{j'})=(-1)^{j+j'}(v_j\otimes v_{j'})$$

$$t\cdot(v_j\otimes v_{j'})=(-1)^{j+j'}(v_j\otimes v_{j'})$$

当 $j+j'$ 为奇数时

$$c\cdot(v_j\otimes v_{j'})=\mathrm{i}^{2j}(v_{3-j}\otimes v_{3-j'})$$

当 $j+j'$ 为偶数时

$$c\cdot(v_j\otimes v_{j'})=v_{3-j}\otimes v_{3-j'}$$

令

$$u_0'=v_1\otimes v_1+v_2\otimes v_2,\ u_1'=-\mathrm{i}v_1\otimes v_2+v_2\otimes v_1$$

$$u_2'=v_1\otimes v_1-v_2\otimes v_2,u_3'=\mathrm{i}v_1\otimes v_2+v_2\otimes v_1$$

容易证明 $\{u_n'\}(n\in\mathbb{Z}_4)$ 也是 $S\otimes S$ 的一组基，并且有

$$s\cdot(u_n')=(-1)^n u_n'$$

$$t\cdot(u_n')=(-1)^n u_n'$$

$$c\cdot(u_n')=\mathrm{i}^n u_n'$$

因此 $S\otimes S\cong\bigoplus_m S_m$.

推论 1　设 M 和 N 是任意的 2 个有限维 H_8-模，那么有一个 H_8-模同构

$$M\otimes N\cong N\otimes M$$

2　H_8 的弱 Hopf 代数及其 Green 环

本节首先把 H_8 扩张成一个弱 Hopf 代数 $\widetilde{H}_8$，然后给出它的 Green 环 $r(\widetilde{H}_8)$ 的生成元和生成关系.

设 $\widetilde{H}_8$ 是由 g、h、x 生成，且满足

$$\begin{cases}g^3=g,h^3=h,g^2=h^2\\hg=gh,x=hxg,x=gxh\\x^2=\dfrac{1}{2}(g^2+g+h-gh)\end{cases}\tag{1}$$

在生成元上定义 $\Delta:\widetilde{H}_8\to\widetilde{H}_8\otimes\widetilde{H}_8$、$\varepsilon:\widetilde{H}_8\to\mathbb{C}$、$T:\widetilde{H}_8\to\widetilde{H}_8$ 如下：

$$\Delta(g)=g\otimes g,\Delta(h)=h\otimes h$$

$$\Delta(x)=\frac{1}{2}(g^2\otimes g^2+g^2\otimes g+h\otimes g^2-h\otimes g)(x\otimes x)$$

$$\varepsilon(1)=\varepsilon(g)=\varepsilon(h)=\varepsilon(x)=1$$

$$T(1)=1,T(g)=g,T(h)=h,T(x)=x$$

命题 1　映射 Δ、ε、T 可自然地扩充到 $\widetilde{H}_8$ 上使之是一个弱 Hopf 代数.

证明　令 m 和 η 是 $\widetilde{H}_8$ 的乘法和单位. 首先证明 $(\widetilde{H}_8,m,\eta,\Delta,\varepsilon)$ 是一个双代数，易知

$$(\Delta(g))^3=\Delta(g),(\Delta(h))^3=\Delta(h)$$

$$(\Delta(g))^2=(\Delta(h))^2,\Delta(h)\Delta(g)=\Delta(g)\Delta(h)$$

$$(\varepsilon(g))^3=\varepsilon(g),(\varepsilon(h))^3=\varepsilon(h)$$

$$(\varepsilon(g))^2=(\varepsilon(h))^2,\varepsilon(h)\varepsilon(g)=\varepsilon(g)\varepsilon(h)$$

$$\varepsilon(x)=\varepsilon(g)\varepsilon(x)\varepsilon(h),\varepsilon(x)=\varepsilon(h)\varepsilon(x)\varepsilon(g)$$

$$(\varepsilon(x))^2=\frac{1}{2}((\varepsilon(g))^2+\varepsilon(g)+\varepsilon(h)-\varepsilon(g)\varepsilon(h))$$

由于

$$\Delta(h)\Delta(x)\Delta(g)=\frac{1}{2}(h\otimes h)(g^2\otimes g^2+g^2\otimes g+h\otimes g^2-h\otimes g)(x\otimes x)(g\otimes g)=\frac{1}{2}(g^2\otimes g^2+g^2\otimes g+h\otimes g^2-h\otimes g)\cdot(hx\otimes hx)(g\otimes g)=\frac{1}{2}(g^2\otimes g^2+g^2\otimes g+h\otimes g^2-h\otimes g)(x\otimes x)=\Delta(x)$$

$$\Delta(g)\Delta(x)\Delta(h)=\frac{1}{2}(g\otimes g)(g^2\otimes g^2+g^2\otimes g+h\otimes g^2-h\otimes g)(x\otimes x)(h\otimes h)=\frac{1}{2}(g^2\otimes g^2+g^2\otimes g+h\otimes g^2-h\otimes g)\cdot(gx\otimes gx)(h\otimes h)=\frac{1}{2}(g^2\otimes g^2+g^2\otimes g+h\otimes g^2-h\otimes g)(x\otimes x)=\Delta(x)$$

又因为

$$(\Delta(x))^2=\frac{1}{4}(g^2\otimes g^2+g^2\otimes g+h\otimes g^2-h\otimes g)\cdot(g^2\otimes g^2+g^2\otimes h+g\otimes g^2-g\otimes h)(x^2\otimes x^2)=\frac{1}{16}((g^2+g+h+gh)\otimes g^2+(g^2-g+h-gh)\otimes h+(g^2+g-h-gh)\otimes g+(g^2-g-h+gh)\otimes gh))\cdot(g^2+g+h-gh)\otimes(g^2+g+h-gh)=$$

$$\frac{1}{8}((g^2+g+h+gh)\otimes(g^2+g+h-gh)+$$
$$(g^2-g+h-gh)\otimes(g^2-g+h+gh)+$$
$$(g^2+g-h-gh)\otimes(g^2+g-h+gh)+$$
$$(-g^2+h+g-gh)\otimes(-g^2+g+h+gh))=$$
$$\frac{1}{2}(g^2\otimes g^2+g\otimes g+h\otimes h-gh\otimes gh)=$$
$$\frac{1}{2}((\Delta(g))^2+\Delta(g)+\Delta(h)-\Delta(g)\Delta(h))$$

因此 Δ 和 ε 保持关系式(1),Δ 和 ε 分别扩展为从 $\widetilde{H}_8$ 到 $\widetilde{H}_8\otimes\widetilde{H}_8$ 和从 $\widetilde{H}_8$ 到$\mathbb{C}$ 的代数同态. 另一方面易知对任意 $X=g$、h 或 x 有

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(X)=(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta(X)$$
$$(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(X)=\mathrm{id}(X)=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta(X)$$

从而 $\widetilde{H}_8$ 是一个双代数.

下面证明 T 诱导了 $\widetilde{H}_8$ 上的弱对极,即有 $T*\mathrm{id}*T=T$ 以及 $\mathrm{id}*T*\mathrm{id}=\mathrm{id}$. 容易知道

$$(T(g))^3=T(g),(T(h))^3=T(h)$$
$$(T(g))^2=(T(h))^2,T(h)T(g)=T(g)T(h)$$

由于

$$T(g)T(x)T(h)=x=T(x)$$

因此 T 保持 $x=hxg$ 的反代数关系,同理 T 也保持 $x=gxh$的反代数关系,进一步地

$$(T(x))^2=\frac{1}{2}((T(g))^2+T(g)+$$
$$T(h)-T(h)T(g))$$

从而 T 可扩展为 $\widetilde{H}_8$ 到 $\widetilde{H}_8$ 的反代数同态.

一方面,有

$$T*\mathrm{id}*T(g)=m(T\otimes\mathrm{id}\otimes T)(g\otimes g\otimes g)=$$
$$g^3=g=T(g)$$
$$\mathrm{id}*T*\mathrm{id}(g)=m(\mathrm{id}\otimes T\otimes\mathrm{id})(g\otimes g\otimes g)=$$
$$g^3=g=\mathrm{id}(g)$$
$$T*\mathrm{id}*T(h)=m(T\otimes\mathrm{id}\otimes T)(h\otimes h\otimes h)=$$
$$h^3=h=T(h)$$
$$\mathrm{id}*T*\mathrm{id}(h)=m(\mathrm{id}\otimes T\otimes\mathrm{id})(h\otimes h\otimes h)=$$
$$h^3=h=\mathrm{id}(h)$$
$$T*\mathrm{id}*T(x)=m(T\otimes\mathrm{id}\otimes T)((g^2x+hx)\otimes$$
$$(g^2x+hx)\otimes g^2x+(g^2x+hx)\otimes(g^2x-hx)\otimes$$
$$gx+(g^2x-hx)\otimes(gx+ghx)\otimes gx+(g^2x-hx)\otimes$$
$$(gx-ghx)\otimes g^2x)=\frac{1}{2}(g^2+g+h-gh)x^3=$$
$$x^5=x=T(x)$$
$$\mathrm{id}*T*\mathrm{id}(x)=m(\mathrm{id}\otimes T\otimes\mathrm{id})((g^2x+hx)\otimes$$
$$(g^2x+hx)\otimes g^2x+(g^2x+hx)\otimes(g^2x-hx)\otimes$$
$$gx+(g^2x-hx)\otimes(gx+ghx)\otimes gx+$$
$$(g^2x-hx)\otimes(gx-ghx)\otimes g^2x)=$$
$$\frac{1}{2}(g^2+g+h-gh)x^3=$$
$$x^5=x=\mathrm{id}(x)$$

另一方面,有

$$\mathrm{id}*T(g)=g^2=T*\mathrm{id}(g)$$
$$\mathrm{id}*T(h)=h^2=T*\mathrm{id}(h)$$
$$T*\mathrm{id}(x)=\frac{1}{2}x(g^2+g+h-gh)x=x^4=g^2$$
$$\mathrm{id}*T(x)=\frac{1}{2}(x^2+x^2g+hx^2-hx^2g)=$$
$$\frac{1}{2}x(g^2+g+h-gh)x=x^4=g^2$$

于是对任意的 $a\in\widetilde{H}_8$,可得 $\mathrm{id}*T(a)$ 和 $T*\mathrm{id}(a)$ 均是 $\widetilde{H}_8$ 的中心中的元素. 如果 $a,b\in\widetilde{H}_8$ 且

$$T*\mathrm{id}*T(a)=T(a),\ T*\mathrm{id}*T(b)=T(\mathrm{b})$$
$$\mathrm{id}*T*\mathrm{id}(a)=a,\ \mathrm{id}*T*\mathrm{id}(\mathrm{b})=b$$

那么有

$$T*\mathrm{id}*T(ab)=T(ab)$$
$$\mathrm{id}*T*\mathrm{id}(ab)=ab$$

从而 T 可扩充成 $\widetilde{H}_8$ 上的弱对极.

容易证明 g^2 和 $1-g^2$ 是 $\widetilde{H}_8$ 的一对正交中心幂等元,令 $W_2=\widetilde{H}_8(1-g^2)$,那么有下面的命题.

命题 2 作为代数 $\widetilde{H}_8$ 可分解成 2 个理想的直和

$$\widetilde{H}_8=W_1\oplus W_2$$

且 W_1 同构于 H_8,W_2 同构于平凡子代数$\mathbb{C}$.

证明 因为 g^2 和 $1-g^2$ 是 $\widetilde{H}_8$ 的一对正交中心幂等元,所以

$$\widetilde{H}_8=\widetilde{H}_8g^2\oplus\widetilde{H}_8(1-g^2)=W_1\oplus W_2$$

定义 $\varphi:W_1\to H_8$ 为

$$\varphi(g^2)=1,\varphi(xg^2)=c,\varphi(g^3)=s,\varphi(h^3)=t$$

容易验证 φ 是一个同构.

由于 $x=hxg$(或 $x=gxh$),因此 $xg^2=hxgg^2=hxg=x$(或 $xg^2=gxhg^2=gxh=x$),从而 $x(1-g^2)=0$. 令 $\psi:W_2\to\mathbb{C}$ 为

$$\psi(1-g^2)=1$$

验证得 $W_2\cong\mathbb{C}$.

易知 $\widetilde{H}_8$ 是半单的,它有一组基为

$$\{1,g,h,x,g^2,gh,xg,gx,xgh\}$$

引理 3　弱 Hopf 代数 $\widetilde{H}_8$ 有 5 个不同构的一维不可约模 $S_m(m\in\mathbb{Z}_4)$ 和 S_4 以及 1 个二维的不可约模 S，它们的 $\widetilde{H}_8$-模结构为

$$S_m:\ g\cdot v^{(m)}=(-1)^m v^{(m)}$$
$$h\cdot v^{(m)}=(-1)^m v^{(m)}$$
$$x\cdot v^{(m)}=\mathrm{i}^m v^{(m)},v^{(m)}\in S_m$$
$$S_4:\ g\cdot v^{(4)}=0,h\cdot v^{(4)}=0$$
$$x\cdot v^{(4)}=0,v^{(4)}\in S_4$$
$$S:\ g\cdot v_j=(-1)^j v_j,h\cdot v_j=(-1)^{j+1}v_j$$
$$x\cdot v_j=v_{3-j},\ v_j\in S,j=1,2$$

证明　由命题 2 和引理 1 立得.

命题 3　作为 $\widetilde{H}_8$-模，有下面结论：

1）如果 $m+m'(m,m'\in\mathbb{Z}_4)$ 为奇数，那么 $S_m\otimes S_{m'}\cong S_{m+m'(\mathrm{mod}4)}$；如果 $m+m'$ 为偶数，那么 $S_m\otimes S_{m'}\cong S_{m-m'(\mathrm{mod}4)}$.

2）$S\otimes S_m\cong S_m\otimes S\cong S,S\otimes S\cong\bigoplus_m S_m$.

3）$S_4\otimes S_m\cong S_m\otimes S_4\cong S_4\otimes S_4\cong S_4,S_4\otimes S\cong S\otimes S_4\cong S_4\oplus S_4$.

证明　1）和 2）见引理 2 的证明.

3）假设 $\{v^{(m)}\otimes v^{(4)}\}$ 和 $\{v^{(4)}\otimes v^{(m)}\}$ 分别是 $S_m\otimes S_4$ 和 $S_4\otimes S_m$ 的一组基，其中 $v^{(m)}\in S_m,v^{(4)}\in S_4$，那么 $S_m\otimes S_4$ 和 $S_4\otimes S_m$ 作为 $\widetilde{H}_8$-模有

$$g\cdot(v^{(m)}\otimes v^{(4)})=0$$
$$h\cdot(v^{(m)}\otimes v^{(4)})=0$$
$$x\cdot(v^{(m)}\otimes v^{(4)})=0$$

而且

$$g\cdot(v^{(4)}\otimes v^{(m)})=0$$
$$h\cdot(v^{(4)}\otimes v^{(m)})=0$$
$$x\cdot(v^{(4)}\otimes v^{(m)})=0$$

因此 $S_4\otimes S_m\cong S_m\otimes S_4\cong S_4$，同理得 $S_4\otimes S_4\cong S_4$.

假设 $\{v_j\otimes v^{(4)}\}$ 和 $\{v^{(4)}\otimes v_j\}$ 分别 $S\otimes S_4$ 和 $S_4\otimes S$ 的一组基，其中 $v_j\in S,j=1,2.\ v^{(4)}\in S_4$，那么 $S\otimes S_4$ 和 $S_4\otimes S$ 作为 $\widetilde{H}_8$-模有

$$g\cdot(v_j\otimes v^{(4)})=0$$
$$h\cdot(v_j\otimes v^{(4)})=0$$
$$x\cdot(v_j\otimes v^{(4)})=0$$

而且

$$g\cdot(v^{(4)}\otimes v_j)=0$$
$$h\cdot(v^{(4)}\otimes v_j)=0$$
$$x\cdot(v^{(4)}\otimes v_j)=0$$

因此 $S_4\otimes S\cong S\otimes S_4\cong S_4\oplus S_4$.

由命题 3 可知弱 Hopf 代数 $\widetilde{H}_8$ 的 Green 环 $r(\widetilde{H}_8)$ 是一个交换环.

定理 1　$r(\widetilde{H}_8)$ 同构于 $\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4]/I$，其中 I 是多项式环 $\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4]$ 的理想，它由关系式 y_1^2-1、y_2^2-1、$y_3y_1-y_3$、$y_3y_2-y_3$、$1+y_1+y_2+y_1y_2-y_3^2$、$y_4^2-y_4$、$y_3y_4-2y_4$ 生成.

证明　令 $x_1=[S_1],x_2=[S_2],x_3=[S],x_4=[S_4]$，由命题 3 知 $r(\widetilde{H}_8)$ 是由 x_1,x_2,x_3,x_4 生成的含有单位元 $[S_0]$ 的环，因此存在一个环满同态

$$\phi:\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4]\to r(\widetilde{H}_8)$$

使得 $\phi(y_i)=x_i(i=1,2,3,4)$. 另一方面，由命题 3 知

$$x_1^2=x_2^2=1,x_3x_1=x_3x_2=x_3,x_4^2=x_4$$
$$x_3x_4=2x_4,1+x_1+x_2+x_1x_2=x_3^2$$

所以

$$\phi(y_1^2-1)=\phi(y_2^2-1)=0$$
$$\phi(y_3y_1-y_3)=\phi(y_3y_2-y_3)=0$$
$$\phi(y_4^2-y_4)=0,\phi(y_3y_4-2y_4)=0$$
$$\phi(1+y_1+y_2+y_1y_2-y_3^2)=0$$

因此 $\phi(I)=0$，从而 ϕ 诱导了一个满同态

$$\overline{\phi}:\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4]/I\to r(\widetilde{H}_8)$$

使得对任意的 $v\in\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4]$，有

$$\overline{\phi}(\bar{v})=\phi(v)$$

式中：$\bar{v}=\pi(v),\pi:\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4]\to\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4]/I$.

易得 $r(\widetilde{H}_8)$ 是一个秩为 6 的自由 $\mathbb{Z}$-模，它的一组基为 $\{1,x_1,x_2,x_3,x_4,x_1x_2\}$，因此定义一个 $\mathbb{Z}$-模同态

$$\psi:r(\widetilde{H}_8)\to\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4]/I$$

为

$$\psi(x_i)=\bar{y}_i(i=1,2,3,4)$$
$$\psi(1)=\bar{1},\psi(x_1x_2)=\bar{y}_1\bar{y}_2=\bar{y}_1\bar{y}_2$$

显然 $\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4]/I$ 作为 $\mathbb{Z}$-模是由 $\{\bar{1},\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{y}_3,\bar{y}_4,\bar{y}_1\bar{y}_2\}$ 张成的，由于

$$\psi\overline{\phi}(\bar{1})=\psi\phi(1)=\bar{1}$$
$$\psi\overline{\phi}(\bar{y}_i)=\psi\phi(y_i)=\psi(x_i)=\bar{y}_i(i=1,2,3,4)$$
$$\psi\overline{\phi}(\bar{y}_1\bar{y}_2)=\psi\phi(y_1y_2)=\psi(x_1x_2)=\bar{y}_1\bar{y}_2$$

因此 $\psi\overline{\phi}=\mathrm{id}$，$\overline{\phi}$ 是单射，所以 $\overline{\phi}$ 是一个同构.

3 H_8 的 Δ-结合代数及其 Green 环

本节首先把 H_8 扩张成一个 Δ-结合代数 $\hat{H}_8$,然后找到它的 Green 环 $r(\hat{H}_8)$ 的含单位元的扩环 $r^*(\hat{H}_8)$,确定 $r^*(\hat{H}_8)$ 的生成元和生成关系.

设 $\hat{H}_8$ 由 e、f、y 生成,且满足

$$\begin{cases} e^3=e, f^3=f, e^2=f^2 \\ ef=fe,\ ey=yf, ye=fy \\ y^2=\frac{1}{2}(e^2+e+f-ef) \end{cases} \tag{2}$$

在生成元上定义 $\Delta:\hat{H}_8\to\hat{H}_8\otimes\hat{H}_8$ 为

$$\Delta(e)=e\otimes e,\ \Delta(f)=f\otimes f$$

$$\Delta(y)=\frac{1}{2}(e^2\otimes e^2+e^2\otimes e+f\otimes e^2-f\otimes e)(y\otimes y)$$

命题 4 映射 Δ 可自然地扩充到 $\hat{H}_8$ 上,使之是一个 Δ-结合代数.

证明 首先证明 Δ 是代数同态,易知

$$(\Delta(e))^3=\Delta(e),(\Delta(f))^3=\Delta(f)$$

$$(\Delta(e))^2=(\Delta(f))^2,\Delta(e)\Delta(f)=\Delta(f)\Delta(e)$$

由于

$$\Delta(f)\Delta(y)=\frac{1}{2}(e^2\otimes e^2+e^2\otimes e+$$

$$f\otimes e^2-f\otimes e)(fy\otimes fy)=\frac{1}{2}(e^2\otimes e^2+e^2\otimes e+$$

$$f\otimes e^2-f\otimes e)(y\otimes y)(e\otimes e)=\Delta(y)\Delta(e)$$

同理可得

$$\Delta(y)\Delta(f)=\Delta(e)\Delta(y)$$

$$(\Delta(y))^2=\frac{1}{2}((\Delta(e))^2+\Delta(e)+$$

$$\Delta(f)-\Delta(e)\Delta(f))$$

因此 Δ 保持关系式(2),Δ 扩展为从 $\hat{H}_8$ 到 $\hat{H}_8\otimes\hat{H}_8$ 的代数同态. 另一方面易知对任意 $Y=e,f$ 或 y 有

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(Y)=(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta(Y)$$

所以 $\hat{H}_8$ 是 Δ-结合代数.

注:$\hat{H}_8$ 不是弱 Hopf 代数. 实际上,若 $\hat{H}_8$ 是弱 Hopf 代数,则可定义 $\varepsilon:\hat{H}_8\to\mathbb{C}$ 是余单位,此时容易得到 $\varepsilon(1)=\varepsilon(e)=\varepsilon(f)=\varepsilon(y)=1$ 且 ε 为代数同态,然而与 $(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(y)=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta(y)=e^2y\neq\mathrm{id}(y)$ 矛盾.

容易证明 e^2 和 $1-e^2$ 是 $\hat{H}_8$ 的一对正交中心幂等元,令 $W_3=\hat{H}_8e^2$, $W_4=\hat{H}_8(1-e^2)$,那么有如下命题.

命题 5 作为代数 $\hat{H}_8$ 可分解为 2 个理想的直和

$$\hat{H}_8=W_3\oplus W_4$$

且 W_3 同构于 H_8, W_4 同构于由单个元素 z 生成的 2-维代数 A,满足 $z^2=0$.

证明 因为 e^2 和 $1-e^2$ 是 $\hat{H}_8$ 的一对正交中心幂等元,所以

$$\hat{H}_8=\hat{H}_8e^2\oplus\hat{H}_8(1-e^2)=W_3\oplus W_4$$

定义 $\varphi:W_3\to H_8$ 为

$$\varphi(e^2)=1,\varphi(ye^2)=c,\varphi(e^3)=s,\varphi(f^3)=t$$

容易验证 φ 是一个同构.

由于 $y(1-e^2)\neq0$,但是

$$(y(1-e^2))^2=y^2(1-e^2)=$$

$$\frac{1}{2}(e^2+e+f-ef)(1-e^2)=0$$

因此令 $\psi:W_4\to A$ 为

$$\psi(1-e^2)=1,\ \psi(1-e^2)y=z$$

易得 $W_4\cong A$.

$\hat{H}_8$(作为代数)同构于 $H_8\oplus A$ 是一个十维代数,它有一组基为 $\{1,e,f,y,e^2,ef,ye,ey,e^2y,yef\}$.

引理 4 Δ-结合代数 $\hat{H}_8$ 有 5 个不同构的一维不可约模 $S_m(m\in\mathbb{Z}_4)$ 和 S_4 以及 2 个不同构的二维不可分解模 S 和 S',它们的 $\hat{H}_8$-模结构为

$$S_m:\ e\cdot v^{(m)}=(-1)^m v^{(m)}$$

$$f\cdot v^{(m)}=(-1)^m v^{(m)}$$

$$y\cdot v^{(m)}=\mathrm{i}^m v^{(m)},v^{(m)}\in S_m$$

$$S_4:e\cdot v^{(4)}=0,f\cdot v^{(4)}=0$$

$$y\cdot v^{(4)}=0,v^{(4)}\in S_4$$

$$S:e\cdot v_j=(-1)^j v_j$$

$$f\cdot v_j=(-1)^{j+1}v_j$$

$$y\cdot v_j=v_{3-j},v_j\in S,j=1,2$$

$$S':\ e\cdot v_k=0,f\cdot v_k=0$$

$$y\cdot v_k=(2-k)v_{3-k}$$

$$v_k\in S',k=1,2$$

证明 由命题 5 和引理 1 立得.

命题 6 作为 $\hat{H}_8$-模,有下面结论:

1) 如果 $m+m'(m,m'\in\mathbb{Z}_4)$ 为奇数,那么 $S_m\otimes S_{m'}\cong S_{m+m'(\mathrm{mod}4)}$;如果 $m+m'$ 为偶数,那么 $S_m\otimes S_{m'}\cong S_{m-m'(\mathrm{mod}4)}$.

2) $S\otimes S_m\cong S_m\otimes S\cong S,S\otimes S\cong\bigoplus_m S_m$.

3) $S_4\otimes S_m\cong S_m\otimes S_4\cong S_4\otimes S_4\cong S_4,S_4\otimes S\cong S\otimes S_4\cong S_4\oplus S_4$.

4) $S_m\otimes S'\cong S'\otimes S_m\cong S'\otimes S_4\cong S_4\otimes S'\cong S_4\oplus S_4$.

5) $S\otimes S'\cong S'\otimes S\cong S'\otimes S'\cong S_4\oplus S_4\oplus S_4\oplus S_4$.

证明 1)、2)和 3)见命题 3 的证明.

4）假设$\{v^{(m)}\otimes v_k\}$和$\{v_k\otimes v^{(m)}\}$分别是$S_m\otimes S'$和$S'\otimes S_m$的一组基，其中$v^{(m)}\in S_m, v_k\in S', k=1,2$. 那么$S_m\otimes S'$和$S'\otimes S_m$作为$\hat{H}_8$-模有

$$e\cdot(v^{(m)}\otimes v_k)=0$$
$$f\cdot(v^{(m)}\otimes v_k)=0$$
$$y\cdot(v^{(m)}\otimes v_k)=0$$

而且

$$e\cdot(v_k\otimes v^{(m)})=0,\ f\cdot(v_k\otimes v^{(m)})=0$$
$$y\cdot(v_k\otimes v^{(m)})=0$$

因此$S_m\otimes S'\cong S'\otimes S_m\cong S_4\oplus S_4$，容易证明$S'\otimes S_4\cong S_4\otimes S'\cong S_4\oplus S_4$.

5）假设$\{v_j\otimes v_k\}$和$\{v_k\otimes v_j\}$分别$S\otimes S'$和$S'\otimes S$的一组基，其中$v_j\in S, v_k\in S', j,k=1,2$. 那么$S\otimes S'$和$S'\otimes S$作为$\hat{H}_8$-模有

$$e\cdot(v_j\otimes v_k)=0$$
$$f\cdot(v_j\otimes v_k)=0$$
$$y\cdot(v_j\otimes v_k)=0$$

而且

$$e\cdot(v_k\otimes v_j)=0, f\cdot(v_k\otimes v_j)=0$$
$$y\cdot(v_k\otimes v_j)=0$$

因此$S\otimes S'\cong S'\otimes S\cong S_4\oplus S_4\oplus S_4\oplus S_4$，容易证明

$$S'\otimes S'\cong S_4\oplus S_4\oplus S_4\oplus S_4$$

由命题 6 知Δ-结合代数$\hat{H}_8$的 Green 环$r(\hat{H}_8)$是一个不含单位元的交换环. 令

$$r^*(\hat{H}_8)=\{(k,\alpha)\mid k\in\mathbb{Z},\alpha\in r(\hat{H}_8)\}$$

任取(k,α)、$(l,\beta)\in r^*(\hat{H}_8)$，规定

$$(k,\alpha)=(l,\beta)$$

当且仅当$k=l,\alpha=\beta$.

定义加法和乘法为

$$(k,\alpha)+(l,\beta)=(k+l,\alpha+\beta)$$
$$(k,\alpha)(l,\beta)=(kl,l\alpha+k\beta+\alpha\beta)$$

则$r^*(\hat{H}_8)$是含有单位元$(1,0)$的环，且

$$r(\hat{H}_8)\cong\{(0,\alpha)\mid\alpha\in r(\hat{H}_8)\}\subseteq r^*(\hat{H}_8)$$

定理 2　$r^*(\hat{H}_8)$同构于$\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]/I$，其中$I$是多项式环$\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]$的理想，它由关系式$y_1^2-y_2^2$、$y_1^3-y_1$、$y_2^3-y_2$、$y_3y_1-y_3$、$y_3y_2-y_3$、$y_1y_5-2y_4$、$y_2y_5-2y_4$、$y_1^2+y_1+y_2+y_1y_2-y_3^2$、$y_3y_5-4y_4$、$y_5^2-4y_4$生成.

证明　令$x_1=[S_1], x_2=[S_2], x_3=[S], x_4=[S_4], x_5=[S']$，由命题 6 知$r(\hat{H}_8)$中的任意元素形式为$\sum_{k_1+\cdots+k_5>0}a_{k_1\cdots k_5}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_5^{k_5}$，其中$a_{k_1k_2\cdots k_5}, k_1,\cdots,k_5\in\mathbb{Z}$，则

$$r^*(\hat{H}_8)=\Big\{(k,\sum_{k_1+\cdots+k_5>0}a_{k_1\cdots k_5}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_5^{k_5})\mid k,\ a_{k_1k_2\cdots k_5},k_1,\cdots,k_5\in\mathbb{Z}\Big\}$$

定义

$$\phi:\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]\to r^*(\hat{H}_8)$$

为$\phi(1)=(1,0)$，$\phi(y_i)=(0,x_i)(i=1,2,3,4,5)$，则$\phi$可以自然扩充成环同态且是满的. 实际上，任意的$v\in\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]$可表示为

$$v=k1_{\mathbb{Z}[y_1,\cdots,y_5]}+\sum_{i_1+\cdots+i_5>0}a_{i_1\cdots i_5}y_1^{i_1}y_2^{i_2}\cdots y_5^{i_5}$$

其中k、$a_{i_1i_2\cdots i_5}$，以及$i_1,\cdots,i_5\in\mathbb{Z}$，那么

$$\phi(v)=\Big(k,\sum_{k_1+\cdots+k_5>0}a_{k_1\cdots k_5}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_5^{k_5}\Big)$$

另一方面，由命题 6 知

$$x_1^2=x_2^2, x_1^3=x_1, x_2^3=x_2, x_3x_1=x_3x_2=x_3$$
$$x_1^2+x_1+x_2+x_1x_2=x_3^2$$
$$x_1x_5=x_2x_5=2x_4, x_3x_5=x_5^2=4x_4$$

可得

$$(0,x_1^2)=(0,x_2^2),(0,x_1^3)=(0,x_1)$$
$$(0,x_2^3)=(0,x_2)$$
$$(0,x_3x_1)=(0,x_3x_2)=(0,x_3)$$
$$(0,x_1^2+x_1+x_2+x_1x_2)=(0,x_3^2)$$
$$(0,x_1x_5)=(0,x_2x_5)=(0,2x_4)$$
$$(0,x_3x_5)=(0,x_5^2)=(0,4x_4)$$

所以

$$\phi(y_1^2-y_2^2)=(0,0),\phi(y_1^3-y_1)=(0,0)$$
$$\phi(y_2^3-y_2)=(0,0)$$
$$\phi(y_3y_1-y_3)=\phi(y_3y_2-y_3)=(0,0)$$
$$\phi(y_1^2+y_1+y_2+y_1y_2-y_3^2)=(0,0)$$
$$\phi(y_5y_1-2y_4)=\phi(y_5y_2-2y_4)=(0,0)$$
$$\phi(y_3y_5-4y_4)=(0,0),\phi(y_5^2-4y_4)=(0,0)$$

因此$\phi(I)=(0,0)$，从而ϕ诱导了一个满同态

$$\bar{\phi}:\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]/I\to r^*(\hat{H}_8)$$

使得对任意的$v\in\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]$，有

$$\bar{\phi}(\bar{v})=\phi(v)$$

式中$\bar{v}=\pi(v)$，$\pi:\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]\to\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]/I$.

易得$r^*(\hat{H}_8)$是一个秩为 8 的自由$\mathbb{Z}$-模，它的一组基为

$$\{(1,0),(0,x_1),(0,x_2),(0,x_3),(0,x_4),(0,x_5),(0,x_1^2),(0,x_1x_2)\}$$

因此定义一个$\mathbb{Z}$-模同态

$$\psi:r^*(\hat{H}_8)\to\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]/I$$

为

$$\psi((1,0))=\bar{1},\psi((0,x_i))=\bar{y}_i(i=1,2,3,4,5)$$
$$\psi((0,x_1^2))=\bar{y}_1^2,\psi((0,x_1x_2))=\bar{y}_1\bar{y}_2=\bar{y}_1\bar{y}_2$$

显然$\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]/I$作为$\mathbb{Z}$-模是由$\{\bar{1},\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{y}_3,\bar{y}_4,\bar{y}_5,\bar{y}_1^2,\bar{y}_1\bar{y}_2\}$张成的,由于

$$\psi\bar{\phi}(\bar{1})=\psi\phi(1)=\psi((1,0))=\bar{1}$$
$$\psi\bar{\phi}(\bar{y}_i)=\psi\phi(y_i)=\psi((0,x_i))=\bar{y}_i(i=1,2,3,4,5)$$
$$\psi\bar{\phi}(\bar{y}_1^2)=\psi\phi(y_1^2)=\psi((0,x_1^2))=\bar{y}_1^2$$
$$\psi\bar{\phi}(\bar{y}_1\bar{y}_2)=\psi\phi(y_1y_2)=\psi((0,x_1x_2))=\bar{y}_1\bar{y}_2$$

因此$\psi\bar{\phi}=\mathrm{id}$,$\bar{\phi}$是单射,所以$\bar{\phi}$是一个同构.

4 结论

1）弱 Hopf 代数$\widetilde{H}_8$的 Green 环$r(\widetilde{H}_8)$是一个交换环,且同构于多项式环$\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4]$的商环, 见定理 1.

2）Δ-结合代数$\hat{H}_8$的 Green 环$r(\hat{H}_8)$是一个不含单位元的交换环. 通过环扩充得到$r(\hat{H}_8)$的扩环$r^*(\hat{H}_8)$,$r^*(\hat{H}_8)$是含有单位元的交换环,其同构于多项式环$\mathbb{Z}[y_1,y_2,y_3,y_4,y_5]$的商环, 见定理 2.

参考文献:

[1] LI F. Weak Hopf algebras and some new solutions of Yang-Baxter equation [J]. J Algebra, 1998, 208(1): 72-100.

[2] LI F, DUPLIJ S. Weak Hopf algebras and singular solutions of quantum Yang-Baxter equation [J]. Comm Math Phys, 2002, 225(1): 192-217.

[3] YANG S L. Weak Hopf algebras corresponding to Cartan matrices [J]. J Math Phys, 2005, 46(043502): 1-18.

[4] CHENG D M, LI F. The structure of weak Hopf algebras corresponding to $U_q(sl_2)$ [J]. Comm in Algebra, 2009, 37(3): 729-742.

[5] 程东明. 对应于$U_q(sl_n)$的弱 Hopf 代数的分类 [J]. 数学物理学报, 2012, 32(3): 662-669.
CHENG D M. Classification of weak Hopf algebras corresponding to $U_q(sl_n)$ [J]. Acta Mathematica Scientia, 2012, 32(3): 662-669.

[6] CHENG D M. The structure of weak quantum groups corresponding to Sweedler algebra [J]. JP Journal of Algebra, Number Theory and Appl, 2010, 16(2): 89-99.

[7] CHEN H X, OYSTAEYEN F V, ZHANG Y H. The Green rings of Taft algebras [J]. Proc Amer Math Soc, 2014, 142(3): 765-775.

[8] LI L B, ZHANG Y H. The Green rings of the genera-lized Taft Hopf algebras [J]. Con Math, 2013, 585: 275-288.

[9] SWEEDLER M E. Hopf algebras [M]. New York: Benjamin, 1969: 3-27.

[10] MASUOKA A. Semisimple Hopf algebras of dimension 6, 8 [J]. Isreal J Math, 1995, 92(1): 361-373.

(责任编辑 吕小红)