

Hilbert 空间中 K -g-框架的和

张 伟¹, 付艳玲²

(1. 北京工业大学应用数理学院, 北京 100124; 2. 河南财政金融学院信息工程系, 郑州 451464)

摘 要: 为了研究 Hilbert 空间中有限个 K -g-框架的和, 基于 Hilbert 空间中通常的框架理论, 利用 K -g-框架诱导出的 K -框架和 K -g-框架的框架算子的方法, 得到一些由有限个 K -g-框架的和构成的 K -g-框架充分条件, 这样可以利用已有的 K -g-框架构造出新的 K -g-框架.

关键词: g-框架; K -g-框架; 框架算子

中图分类号: O 174. 2

文献标志码: A

文章编号: 0254 - 0037(2017)08 - 1283 - 06

doi: 10. 11936/bjutxb2016040081

Sums of K -g-frames in Hilbert Space

ZHANG Wei¹, FU Yanling²

(1. College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;

2. Department of Information Engineering, Henan Institute of Finance and Banking, Zhengzhou 451464, China)

Abstract: Based on the frame theorem of Hilbert spaces and by using the method of K -g-frames induced K -frames and K -g-frames operators, the sum of finitely many K -g-frames was addressed, and some sufficient conditions for the sum of finitely many K -g-frames was obtained to be a K -g-frame. The results provide us with a new method to construct K -g-frames.

Key words: g-frame; K -g-frame; frame operator

Hilbert 空间中的框架概念最早是 Duffin 等^[1] 1952 年在研究非调和 Fourier 级数时引入的. 框架可以看作标准正交基的推广, 可以用稳定的方式表示空间中的任意元素但不要求是正交并且表达不一定唯一. 直到 1986 年, Daubechies 等^[2] 的突破性研究, 才使框架理论被众多学者所关注. 如今它已被广泛地应用到信号图像处理、采样理论、互联网、通信编码及神经网络等诸多重要领域; 随着对 Hilbert 空间中框架理论及其应用研究的不断深入, 出现了许多框架的推广形式, 例如子空间框架 (Fusion 框架)、连续框架、g-框架等, 这些推广极大地丰富了框架理论^[3-5].

2012 年, Găvruta^[6] 在研究有界线性算子 K 的原子分解系统时, 引入了 K -框架. 一般框架通常在整个空间上研究, 而 K -框架则限制在给定的一个有界线性算子的值域上研究, 这在实际应用中更具灵活性, K -框架可以看作一般框架的一种推广. g-框架是基于投影算子提出的一个广义框架, 它同样推广了一般框架. K -g-框架^[7-9] 综合了 K -框架和 g-框架的性质, 是 K -框架和 g-框架的一个推广, 它取特殊情况可得到 K -框架、g-框架和一般框架. 但是, g-框架的一些性质对于 K -g-框架而言未必成立, 比如对 g-框架而言, Hilbert 空间中算子列构成 g-框架等价于其合成算子是满的, 但对 K -g-框架而言这条件变

收稿日期: 2016-04-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271037); 河南省自然科学基金资助项目(162300410191)

作者简介: 张 伟(1979—), 男, 博士研究生, 主要从事小波分析及应用、标架理论及应用方面的研究, E-mail: zwfyllhappy@126.com

通信作者: 付艳玲(1978—), 女, 讲师, 主要从事标架理论及应用、粗糙集理论方面的研究, E-mail: fylhappy@126.com

为其合成算子是有界的,且 $\text{Range}(K) \subset \text{Range}(Q)$, 其中 Q 为其合成算子. 本文主要从 2 种不同的角度讨论有限个 K -g-框架的和构成 K -g-框架条件, 一种从 K -g-框架诱导出的 K -框架的角度讨论, 另一种从 K -g-框架的框架算子的角度讨论. 并且给出 2 个 K -g-框架分别在不同的线性算子作用下的和构成 K -g-框架的条件. 由于 K -g-框架的框架算子是不可逆的, 这样与 g -框架相比也有一些不同之处, 比如对于 g -框架能给出有限个 g -框架的和构成 g -框架的充分必要条件, 而对于 K -g-框架只给出了充分条件.

设 U, V 是可分的复 Hilbert 空间, $\{V_j\}_{j \in J}$ 是 V 的闭子空间序列, 其中 J 是整数集 $\mathbb{Z}$ 的子集, 记 $L(U, V)$ 为从 U 到 V 的所有有界线性算子的集合. 线性空间 $l^2(\{V_j\}_{j \in J})$ 定义为

$$l^2(\{V_j\}_{j \in J}) =$$

$$\left\{ \{a_j\}_{j \in J} : a_j \in V_j, j \in J \text{ 且 } \sum_{j \in J} \|a_j\|^2 < \infty \right\}$$

其内积为

$$\langle \{g_j\}_{j \in J}, \{h_j\}_{j \in J} \rangle = \sum_{j \in J} \langle g_j, h_j \rangle$$

那么 $l^2(\{V_j\}_{j \in J})$ 是一个复 Hilbert 空间. 文中 $0 \neq K \in L(U, L(U))$ 为从 U 到 U 的所有有界线性算子的集合, K^* 是 K 的伴随算子, 如果 $T \in L(U, V)$, $\text{Range}(T)$ 和 $\text{Ker}(T)$ 分别表示 T 的值域和核.

设 $\{\tilde{e}_{j,k}\}_{k \in K_j}$ 是 V_j 上的一个标准正交基, 其中 K_j 是整数集 $\mathbb{Z}$ 的子集, 对任意的 $j \in J, k \in K_j$, 定义 $e_{j,k} = \{\delta_{j,k}, \tilde{e}_{j,k}\}, j \in J$, 这里 $\delta_{j,k}$ 是 Kronecker delta, 则容易验证 $\{e_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 是 $l^2(\{V_j\}_{j \in J})$ 上的标准正交基^[4].

定义 1^[4] 算子列 $\{A_j\}_{j \in J}$ 称为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 g -框架, 如果存在常数 $A, B > 0$ 使得对任意的 $f \in U$, 有

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} \|A_j f\|^2 \leq B \|f\|^2$$

如果只有右边不等式成立, 则称 $\{A_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 g -Bessel 序列; 如果 $A = B$, 则称 $\{A_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的紧 g -框架; 如果 $A = B = 1$, 则称 $\{A_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 Parseval g -框架.

假设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 g -Bessel 序列, 其合成算子 Q 、分析算子 Q^* 以及框架算子 S 的定义分别为

$$Q: l^2(\{V_j\}_{j \in J}) \rightarrow U, Q(\{g_j\}_{j \in J}) = \sum_{j \in J} A_j^* g_j$$

$$Q^*: U \rightarrow l^2(\{V_j\}_{j \in J}), Q^* f = \{A_j f\}_{j \in J}$$

$$S: U \rightarrow U, S f = \sum_{j \in J} A_j^* A_j f$$

定义 2^[7] 算子列 $\{A_j\}_{j \in J}$ 称为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架, 如果存在常数 $A, B > 0$ 使得对任意的 $f \in U$, 有

$$A \|K^* f\|^2 \leq \sum_{j \in J} \|A_j f\|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1)$$

如果式(1)在 M 上成立, 其中

$$M = \left\{ \sum_{j \in J} A_j^* g_j : g_j \in V_j, j \in J \right\}$$

则称 $\{A_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架序列.

注 1 由 K -g-框架及 g -Bessel 序列定义, K -g-框架必为 g -Bessel 序列.

下面把紧框架推广到 K -g-框架上^[8], 给出紧 K -g-框架的定义.

定义 3 设 $K \in L(U)$, 算子列 $\{A_j\}_{j \in J}$ 称为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的紧 K -g-框架, 如果存在常数 $A > 0$, 使得

$$A \|K^* f\|^2 = \sum_{j \in J} \|A_j f\|^2, \forall f \in U \quad (2)$$

如果 $A = 1$, 则称 $\{A_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 Parseval K -g-框架.

引理 1^[6] 设 H, H_1, H_2 是复的 Hilbert 空间, $L_1 \in L(H_1, H), L_2 \in L(H_2, H)$, 则下列命题等价:

- (1) $\text{Range}(L_1) \subset \text{Range}(L_2)$;
- (2) 存在 $\lambda > 0$, 满足 $L_1 L_1^* \leq \lambda^2 L_2 L_2^*$, 即对任意的 $f \in H$, 有 $\langle L_1 L_1^* f, f \rangle \leq \lambda^2 \langle L_2 L_2^* f, f \rangle$;
- (3) 存在线性有界算子 $T \in L(H_1, H_2)$ 使得 $L_1 = L_2 T$.

引理 2^[6] 设 H 是一可分的 Hilbert 空间, 则 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 H 的 K -框架的充分必要条件是存在一个线性有界算子 $L: l^2 \rightarrow H$ 满足 $f_n = L e_n$ 和 $\text{Range}(K) \subset \text{Range}(L)$, 其中 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 l^2 的一个标准正交基.

引理 3^[11] 设 H, H_1, H_2, H_3 是复的 Hilbert 空间, $L_1 \in L(H_1, H), L_2 \in L(H_2, H), L_3 \in L(H_3, H)$, 则下列命题等价:

- (1) $\text{Range}(L_1) \subset \text{Range}(L_2) \subset \text{Range}(L_3)$;
- (2) 存在 $\lambda > 0$, 满足 $L_1 L_1^* \leq \lambda^2 (L_2 L_2^* + L_3 L_3^*)$;
- (3) 存在线性有界算子 $T_2 \in L(H_1, H_3), T_1 \in L(H_1, H_2)$ 使得 $L_1 = L_2 T_1 + L_3 T_2$.

1 主要结果及证明

对于给定的 2 个 K -g-框架, 它们的和一定是 K -g-框架吗? 回答是否定的, 也就是说它们的和不一定能构成新的 K -g-框架.

例 1 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 U 的一个标准正交基, 令 $V_j = \text{span}\{e_{(j-1)k+m} : 1 \leq m \leq k\}, j = 1, 2, \dots$, 其中 $k \geq 5$ 是固定的正整数; 定义线性有界算子 $K: U \rightarrow U, A_j:$

$U \rightarrow V_j, \Gamma_j: U \rightarrow V_j$ 和 $\Delta_j: U \rightarrow V_j$ 为

$$Ke_1 = e_1, Ke_2 = e_2, Ke_j = 0, j \geq 3$$

$$\Lambda_j f = \sum_{m=1}^k \langle f, e_m \rangle e_m; \Lambda_j f = 0, j \geq 2$$

$$\Gamma_j f = \sum_{m=1}^{k-1} \langle f, e_m \rangle e_m; \Gamma_j f = 0, j \geq 2$$

$$\Delta_j f = \sum_{m=1}^{k-1} \langle f, e_m \rangle e_m; \Delta_j f = 0, j \geq 2$$

容易计算 $K^*e_1 = e_1, K^*e_2 = e_2, K^*e_j = 0, j \geq 3$. 下面验证 $\{\Lambda_j\}_{j=1}^\infty, \{\Gamma_j\}_{j=1}^\infty$ 和 $\{\Delta_j\}_{j=1}^\infty$ 均是 K -g-框架, 事实上

$$\|K^*f\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^\infty \langle f, e_j \rangle K^*e_j \right\|^2 = |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2$$

$$\sum_{j=1}^\infty \|\Lambda_j f\|^2 = \|\Lambda_1 f\|^2 =$$

$$\left\| \sum_{m=1}^k \langle f, e_m \rangle e_m \right\|^2 =$$

$$\sum_{m=1}^k |\langle f, e_m \rangle|^2 \geq \|K^*f\|^2$$

$$\sum_{j=1}^\infty \|\Gamma_j f\|^2 = \|\Gamma_1 f\|^2 =$$

$$\left\| - \sum_{m=1}^{k-1} \langle f, e_m \rangle e_m \right\|^2 =$$

$$\sum_{m=1}^{k-1} |\langle f, e_m \rangle|^2 \geq \|K^*f\|^2$$

$$\sum_{j=1}^\infty \|\Delta_j f\|^2 = \|\Delta_1 f\|^2 =$$

$$\left\| \sum_{m=1}^{k-1} \langle f, e_m \rangle e_m \right\|^2 =$$

$$\sum_{m=1}^{k-1} |\langle f, e_m \rangle|^2 \geq \|K^*f\|^2$$

所以, 对任意的 $f \in U$, 有

$$\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j=1}^\infty \|\Lambda_j f\|^2 \leq \|f\|^2$$

$$\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j=1}^\infty \|\Gamma_j f\|^2 \leq \|f\|^2$$

$$\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j=1}^\infty \|\Delta_j f\|^2 \leq \|f\|^2$$

但是, 对于 $\{\Lambda_j + \Gamma_j\}_{j=1}^\infty$ 有

$$\sum_{j=1}^\infty \|(\Lambda_j + \Gamma_j)f\|^2 = \|(\Lambda_1 + \Gamma_1)f\|^2 =$$

$$\|\langle f, e_k \rangle e_k\|^2 = |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

即 $\{\Lambda_j + \Gamma_j\}_{j=1}^\infty$ 是 g-Bessel 序列, 而无法确定 $|\langle f, e_k \rangle|^2$ 与 $\|K^*f\|^2$ 的大小关系, 也就是说 $\{\Lambda_j + \Gamma_j\}_{j=1}^\infty$ 不一定是 K -g-框架. 而对于 $\{\Lambda_j + \Delta_j\}_{j=1}^\infty$ 有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^\infty \|(\Lambda_j + \Delta_j)f\|^2 &= \\ \|(\Lambda_1 + \Delta_1)f\|^2 &= \\ \left\| 2 \sum_{m=1}^{k-1} \langle f, e_m \rangle e_m + \langle f, e_k \rangle e_k \right\|^2 &= \\ 2 \sum_{m=1}^{k-1} |\langle f, e_m \rangle|^2 + |\langle f, e_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

所以有

$$\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j=1}^\infty \|(\Lambda_j + \Delta_j)f\|^2 \leq 2\|f\|^2$$

即 $\{\Lambda_j + \Delta_j\}_{j=1}^\infty$ 是 K -g-框架.

那么, 对于给定的 2 个 K -g-框架, 在什么条件下它们的和能构成新的 K -g-框架? 为此首先给出一些引理.

引理 4^[4] 设 $\Lambda_j \in L(U, V_j), j \in J$, 序列 $\{u_{j,k} = \Lambda_j^* e_{j,k} : j \in J, k \in K_j\}$ 称为由 $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$ 关于 $\{e_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 诱导生成, 则有:

(1) $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$ 是 U 上的一个 g-框架 (g-Bessel 序列、紧 g-框架、g-Riesz 基) 的充要条件是 $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 是 U 上的一个框架 (Bessel 序列、紧框架、Riesz 基).

(2) $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$ 的 g-框架算子与 $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 的框架算子等同.

引理 5 $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架的充要条件是由它诱导出的 $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 是 U 上 K -框架.

证明: 假设 $\{\tilde{e}_{j,k}\}_{k \in K_j}$ 是 V_j 上的一个标准正交基, $j \in J$, 则对任意的 $f \in U$ 和 $j \in J$, 有

$$\Lambda_j f = \sum_{k \in K_j} \langle \Lambda_j f, \tilde{e}_{j,k} \rangle \tilde{e}_{j,k} =$$

$$\sum_{k \in K_j} \langle f, \Lambda_j^* \tilde{e}_{j,k} \rangle \tilde{e}_{j,k} = \sum_{k \in K_j} \langle f, u_{j,k} \rangle \tilde{e}_{j,k}$$

所以, 对任意的 $f \in U$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \|\Lambda_j f\|^2 &= \sum_{j \in J} \left\| \sum_{k \in K_j} \langle f, u_{j,k} \rangle \tilde{e}_{j,k} \right\|^2 = \\ \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, u_{j,k} \rangle|^2 \end{aligned}$$

因此, $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架的充要条件是 $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 是 U 上 K -框架. 证毕.

注 2 由引理 2 的证明过程可知, $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$ 的框架算子与 $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 的相同.

引理 6 假设 $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$ 是 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 g-Bessel 序列. 则 $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$ 是 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架的充要条件是存在常数 $A > 0$, 使得 $S \geq AKK^*$, 其中 S 是 $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$ 的框架算子.

证明: $\{\Lambda_j\}_{j \in J}$ 是 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的界为 A, B 的

K -g-框架, 框架算子为 S 的充要条件是对任意的 $f \in U$, 有

$$A \|K^*f\|^2 \leq \sum_{j \in J} \|A_j f\|^2 = \langle Sf, f \rangle \leq B \|f\|^2$$

也即是, $\langle AKK^*f, f \rangle \leq \langle Sf, f \rangle \leq \langle Bf, f \rangle$. 证毕.

定理 1 设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 和 $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ 均为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架, 由 $\{A_j\}_{j \in J}$ 和 $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ 关于 $\{e_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 诱导生成的 K -框架分别为 $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 和 $\{w_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$, 且 $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 和 $\{w_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 的合成算子分别是 L_1 和 L_2 , 如果 $L_1 L_2^*$ 和 $L_2 L_1^*$ 都是正算子, 则 $\{A_j + \Gamma_j\}_{j \in J}$ 是 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架.

证明: 设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 和 $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ 均为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架, $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 和 $\{w_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 分别是由它们诱导出的 U 上的 K -框架, 由引理 2 知, 存在线性有界算子 L_1 和 L_2 满足 $u_{j,k} = L_1 e_{j,k}$ 和 $w_{j,k} = L_2 e_{j,k}$, 并且 $\text{Range}(K) \subset \text{Range}(L_1)$, $\text{Range}(K) \subset \text{Range}(L_2)$, 其中 $\{e_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 是 $l^2(\{V_j\}_{j \in J})$ 上的一个标准正交基, 所以

$$\text{Range}(K) \subset \text{Range}(L_1) + \text{Range}(L_2)$$

根据引理 3, 存在 $\lambda > 0$, 且

$$KK^* \leq \lambda^2 (L_1 L_1^* + L_2 L_2^*)$$

对于任意的 $f \in U$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \|(A_j + \Gamma_j)f\|^2 &= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, u_{j,k} + w_{j,k} \rangle|^2 = \\ \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, L_1 e_{j,k} + L_2 e_{j,k} \rangle|^2 &= \\ \|(L_1 + L_2)^* f\|^2 &= \\ \langle L_1 L_1^* f, f \rangle + \langle L_1 L_2^* f, f \rangle + \langle L_2 L_1^* f, f \rangle + \\ \langle L_2 L_2^* f, f \rangle &\geq \langle (L_1 L_1^* + L_2 L_2^*) f, f \rangle \geq \\ \frac{1}{\lambda^2} \langle KK^* f, f \rangle &= \frac{1}{\lambda^2} \|K^* f\|^2 \end{aligned}$$

设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 和 $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ 的框架上界分别为 B_1 和 B_2 , 由引理 5 的证明过程可知, $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 和 $\{w_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 的框架上界也分别为 B_1 和 B_2 , 利用闵可夫斯基不等式, 对于任意的 $f \in U$, 有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in J} \|(A_j + \Gamma_j)f\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \\ \left(\sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, u_{j,k} + w_{j,k} \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \\ \left(\sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, u_{j,k} \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, w_{j,k} \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \\ \sqrt{B_1} \|f\| + \sqrt{B_2} \|f\| &= (\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}) \|f\| \end{aligned}$$

因此, $\{A_j + \Gamma_j\}_{j \in J}$ 是 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-

框架.

证毕.

注 3 用相同的方法, 可以推广到有限个 K -g-框架的情形.

推论 1 设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 和 $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ 均为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 Parseval K -g-框架, 由 $\{A_j\}_{j \in J}$ 和 $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ 关于 $\{e_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 诱导生成 Parseval K -框架分别为 $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 和 $\{w_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$, 且 $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 和 $\{w_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 的合成算子分别是 L_1 和 L_2 , 如果 $L_1 L_2^* = 0$, 则 $\{A_j + \Gamma_j\}_{j \in J}$ 是 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的界为 2 的紧 K -g-框架.

证明: 设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 和 $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ 均为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 Parseval K -g-框架, $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 和 $\{w_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 分别是由它们诱导出的 U 上的 Parseval K -框架, 则线性有界算子 L_1 和 L_2 满足 $u_{j,k} = L_1 e_{j,k}$ 和 $w_{j,k} = L_2 e_{j,k}$, 并且 $\text{Range}(K) = \text{Range}(L_1)$, $\text{Range}(K) = \text{Range}(L_2)$, 其中 $\{e_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 是 $l^2(\{V_j\}_{j \in J})$ 上的一个标准正交基, 对于任意的 $f \in U$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \|(A_j + \Gamma_j)f\|^2 &= \\ \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, u_{j,k} + w_{j,k} \rangle|^2 &= \\ \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, L_1 e_{j,k} + L_2 e_{j,k} \rangle|^2 &= \\ \|(L_1 + L_2)^* f\|^2 &= \\ \|L_1^* f\|^2 + \langle L_1 L_2^* f, f \rangle + \langle L_2 L_1^* f, f \rangle + \|L_2^* f\|^2 &= \\ \|L_1^* f\|^2 + \|L_2^* f\|^2 &= 2 \|K^* f\|^2 \end{aligned}$$

定理 2 设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 和 $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ 均为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架, 由 $\{A_j\}_{j \in J}$ 和 $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ 关于 $\{e_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 诱导生成 K -框架分别为 $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 和 $\{w_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$, $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 和 $\{w_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 的合成算子分别是 L_1 和 L_2 , 且 $L_1 L_2^* = 0$. 若 $T_i \in L(U)$ 满足 $\text{Range}(L_i) \subset \text{Range}(T_i L_i)$, 其中 $i = 1, 2$, 则 $\{A_j T_1^* + \Gamma_j T_2^*\}_{j \in J}$ 是 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架.

证明: 设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 和 $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ 均为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架, $\{u_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 和 $\{w_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 分别是由它们诱导出的 U 上的 K -框架, 由引理 2 知, 存在线性有界算子 L_1 和 L_2 满足 $u_{j,k} = L_1 e_{j,k}$ 和 $w_{j,k} = L_2 e_{j,k}$, 并且 $\text{Range}(K) \subset \text{Range}(L_1)$, $\text{Range}(K) \subset \text{Range}(L_2)$, 其中 $\{e_{j,k}\}_{j \in J, k \in K_j}$ 是 $l^2(\{V_j\}_{j \in J})$ 上的一个标准正交基. 对于任意的 $f \in U$ 和 $j \in J$, 有

$$\begin{aligned} A_j T_1^* f &= \sum_{k \in K_j} \langle A_j T_1^* f, \tilde{e}_{j,k} \rangle \tilde{e}_{j,k} = \\ \sum_{k \in K_j} \langle f, T_1 A_j^* \tilde{e}_{j,k} \rangle \tilde{e}_{j,k} &= \\ \sum_{k \in K_j} \langle f, T_1 u_{j,k} \rangle \tilde{e}_{j,k} \end{aligned}$$

其中 $\{\tilde{e}_{j,k}\}_{k \in K_j}$ 是 V_j 上的一个标准正交基, $j \in J$. 所以, 对任意的 $f \in U$, 有

$$\sum_{j \in J} \|A_j T_1^* f\|^2 = \sum_{j \in J} \left\| \sum_{k \in K_j} \langle f, T_1 u_{j,k} \rangle \tilde{e}_{j,k} \right\|^2 = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, T_1 u_{j,k} \rangle|^2$$

因此, 对任意的 $f \in U$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \| (A_j T_1^* + T_j T_2^*) f \|^2 &= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, T_1 u_{j,k} + T_2 w_{j,k} \rangle|^2 = \\ \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, T_1 L_1 e_{j,k} + T_2 L_2 e_{j,k} \rangle|^2 &= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, T_1 L_1 e_{j,k} + T_2 L_2 e_{j,k} \rangle|^2 = \\ \| (T_1 L_1 + T_2 L_2)^* f \|^2 + \langle T_1 L_2 L_2^* T_2^* f, f \rangle + \| (T_2 L_2)^* f \|^2 &= \\ \| (T_1 L_1)^* f \|^2 + \| (T_2 L_2)^* f \|^2 \end{aligned}$$

因为, $\text{Range}(K) \subset \text{Range}(L_1) \subset \text{Range}(T_i L_i)$, 其中 $i=1, 2$, 由引理 1, 对每个 $i=1, 2$, 存在 $\lambda_i > 0$, 使得 $KK^* \leq \lambda^2 T_i L_i (T_i L_i)^*$. 对任意的 $f \in U$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \| (A_j T_1^* + T_j T_2^*) f \|^2 &= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} |\langle f, T_1 u_{j,k} + T_2 w_{j,k} \rangle|^2 = \\ \| (T_1 L_1)^* f \|^2 + \| (T_2 L_2)^* f \|^2 &\geq \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \| K^* f \|^2 \end{aligned}$$

所以, $\{A_j T_1^* + T_j T_2^*\}_{j \in J}$ 是 U 关于 $\{U_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架. 证毕.

定理 3 设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架且框架算子为 S , 如果 $T \in L(U)$ 是正算子. 则 $\{A_j + A_j T\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架; 更多地, 对于任意自然数 n , $\{A_j + A_j T^n\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架.

证明: $\{A_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架且框架算子为 S , 则由引理 6, 存在 $\lambda > 0$, 使得 $S \geq \lambda^2 KK^*$.

对于任意的 $f \in U$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \| (A_j + A_j T) f \|^2 &= \sum_{j \in J} \| A_j (I + T) f \|^2 \leq \\ B_1 \| (I + T) f \|^2 &\leq B \| f \|^2 \end{aligned}$$

$\{A_j + A_j T\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 g -Bessel 序列, 进而

$$\sum_{j \in J} (A_j + A_j T)^* (A_j + A_j T) =$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} (I + T)^* A_j^* A_j (I + T) f &= (I + T)^* \sum_{j \in J} A_j^* A_j (I + T) f = \\ (I + T)^* S (I + T) f \end{aligned}$$

所以 $\{A_j + A_j T\}_{j \in J}$ 的框架算子为 $(I + T)^* S (I + T)$.

又因为

$$(I + T)^* S (I + T) \geq S \geq \lambda^2 KK^*$$

再由引理 6, $\{A_j + A_j T\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架. 对于任意自然数 n , $\{A_j + A_j T^n\}_{j \in J}$ 的框架算子为 $(I + T^n)^* S (I + T^n) \geq S$, 所以 $\{A_j + A_j T^n\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架. 证毕.

注 4 用相同的方法, 可以推广到有限个 K -g-框架的情形.

推论 2 设 $\{A_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架且框架算子为 S , $\{J_1, J_2\}$ 是 J 的一个分划, S_i 是 g -Bessel 序列 $\{A_j\}_{j \in J_i}, i=1, 2$ 的框架算子, 则对于任意的自然数 n, m , $\{A_j + A_j S_1^n\}_{j \in J_1} \cup \{A_j + A_j S_2^m\}_{j \in J_2}$ 为 U 关于 $\{A_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架.

证明: 对于任意的 $f \in U$, 有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in J_1} \| (A_j + A_j S_1^n) f \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{j \in J} \| A_j f \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j \in J} \| A_j S_1^n f \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ B \| f \| + B \| S_1^n \| \| f \| &= B(1 + \| S_1^n \|) \| f \| \end{aligned}$$

类似有

$$\left(\sum_{j \in J_2} \| (A_j + A_j S_2^m) f \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq B(1 + \| S_2^m \|) \| f \|^{\frac{1}{2}}$$

则 $\{A_j + A_j S_1^n\}_{j \in J_1}, \{A_j + A_j S_2^m\}_{j \in J_2}$ 均为 g -Bessel 序列, 所以

$$\begin{aligned} \{A_j + A_j S_1^n\}_{j \in J_1} \cup \{A_j + A_j S_2^m\}_{j \in J_2} &\text{为 } g\text{-Bessel 序列, 对于任意的 } f \in U, \text{ 有} \\ \sum_{j \in J_1} (A_j + A_j S_1^n)^* (A_j + A_j S_1^n) f &= (I + S_1^n)^* \sum_{j \in J_1} A_j^* (A_j + A_j S_1^n) f = \\ (I + S_1^n)^* S_1 (I + S_1^n) f &= (I + S_1^n) (S_1 + S_1^{n+1}) f = \\ (S_1 + 2S_1^{n+1} + S_1^{2n+1}) f \end{aligned}$$

所以, $\{A_j + A_j S_1^n\}_{j \in J_1}, \{A_j + A_j S_2^m\}_{j \in J_2}$ 的框架算子分别为 $S_1 + 2S_1^{n+1} + S_1^{2n+1}$ 和 $S_2 + 2S_2^{m+1} + S_2^{2m+1}$, 假设 S_0 是 $\{A_j + A_j S_1^n\}_{j \in J_1} \cup \{A_j + A_j S_2^m\}_{j \in J_2}$ 的框架算子, 因为 $\{A_j\}_{j \in J}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架且框架算子为 S , 则由引理 6, 存在 $\lambda > 0$, 使得 $S \geq \lambda^2 KK^*$. 所以

$$S_0 \geq S_1 + S_2 = S \geq \lambda^2 KK^*$$

因此, $\{A_j + A_j S_1^n\}_{j \in J_1} \cup \{A_j + A_j S_2^m\}_{j \in J_2}$ 为 U 关于 $\{V_j\}_{j \in J}$ 的 K -g-框架. 证毕.

2 结论

1) 利用 K -g-框架诱导生成 K -框架的性质, 给出 2 个 K -g-框架的和构成 K -g-框架的充分条件, 见定理 1.

2) 利用 K -g-框架诱导生成 K -框架的性质, 给出 2 个 K -g-框架分别在不同的线性算子作用下的和构成 K -g-框架的条件, 见定理 2.

3) 利用 K -g-框架的框架算子的性质, 给出 2 个 K -g-框架的和构成 K -g-框架的条件, 见定理 3 及推论 2.

参考文献:

- [1] DUFFIN D J, SCHAEFFER A C. A class of nonharmonic fourier series[J]. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341-366.
- [2] DAUBECHIES I, GROSSMANN A, MEYER Y. Painless nonorthogonal expansions [J]. J Math Phys, 1986, 27: 1271-1283.
- [3] KHOSRAVI A, MUSAZADEH K. Fusion frames and g-frames[J]. J Math Anal Appl, 2008, 342: 1068-1083.
- [4] SUN W C. G-frame and g-Riesz bases[J]. J Math Anal Appl, 2006, 322(1): 437-452.

- [5] OBEIDAT S, SAMARAH S, CASAZZA P G, et al. Sums of Hilbert space frames[J]. J Math Anal Appl, 2009, 351(1): 579-585.
- [6] GÄVRUTA L. Frames for operators [J]. Appl Comput Harmon Anal, 2012, 32(1): 139-144.
- [7] 周燕, 朱玉灿. K -g-框架与子空间对偶 g -框架[J]. 数学学报(中文版), 2013, 56(5): 799-806.
ZHOU Y, ZHU Y C. K -g-frames and dual g -frames for closed subspaces [J]. Acta Mathematica Sinica Chinese Series, 2013, 56(5): 799-806. (in Chinese)
- [8] 丁明玲, 肖祥春, 曾晓明. Hilbert 空间中的紧 K -框架 [J]. 数学学报(中文版), 2013, 56(1): 105-112.
DING M L, XIAO X C, ZENG X M. Tight K -frames in Hilbert spaces [J]. Acta Mathematica Sinica Chinese Series, 2013, 56(1): 105-112. (in Chinese)
- [9] 周燕, 朱玉灿. Hilbert 空间中的 K -g-框架的性质[J]. 数学学报(中文版), 2014, 57(5): 1031-1040.
ZHOU Y, ZHU Y C. Characterizations K -g-frames in Hilbert spaces [J]. Acta Mathematica Sinica Chinese Series, 2014, 57(5): 1031-1040. (in Chinese)
- [10] XIAO X, ZHU Y, SHU Z, et al. G-frames with bounded linear operators [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2015, 45(2): 675-693.
- [11] RUDIN W. Functional analysis[M]. 2nd ed. New York: McGraw Hill, 1991: 306-341.

(责任编辑 吕小红)