余代数的 Krull 维数

姚海楼，范维丽，平艳茹
(北京工业大学应用数理学院，北京 100124)

摘 要: 为了研究余代数的结构，基于素子余代数引进了余代数 Krull 维数概念，通过局部化方法对其进行了研究，得到一些有关 Krull 维数的等式与不等式，从而为余代数的研究提供了有用的工具.

关键词: 余代数; 余模; 素余代数; Krull 维数; 诺特余代数
中图分类号: O 153.3 文献标志码: A 文章编号: 0254-0037(2016)08-1265-05
doi: 10.11936/bjutxb2015110090

Krull Dimension of Coalgebras

YAO Hailou，FAN Weili，PING Yanru
(College of Applied Sciences，Beijing University of Technology，Beijing 100124，China)

Abstract: To study the structures of coalgebras，the notion of Krull dimension of coalgebras based on prime subcoalgebras was introduced. Research on it by means of localization was made and some equalities and inequalities on Krull dimensions were obtained，then provide useful tools for studying of coalgebras.

Key words: coalgebras; comodules; prime coalgebras; Krull dimension; Noetherian coalgebras

近些年来，在研究余代数的一般性理论时出现了几类具体的余代数，并对它们分别进行了研究. 这些余代数中有许多是通过它们的余模范畴的某种性质或者仅仅通过单余模或内射余模给出定义. 众所周知，Krull 维数在交换代数研究中扮演着重要角色[1]. 类似地，可用 Krull 维数研究与刻画余代数结构，并讨论余代数和余模的一些性质. 本文将引进余代数的 Krull 维数概念并研究其性质.

现在，简要回顾一些基本概念和相关事实: 每个具有可分离余根的余代数均 Morita-Takeuchi 等价于一个路余代数的子余代数[2-3]. 据此，有向图的路余代数成为余代数理论中的重要研究对象. 由文献[4]，Quiver(箭图) $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$ 由 2 个集合 Q_0、Q_1 与 2 个映射 s、t 给出. 其中 Q_0 是点集，Q_1 是箭向集; 2 个映射 s,t: $Q_1\rightarrow Q_0$ 给出箭向 x，使得 $s(x)$ 是 x 的始点，$t(x)$ 是 x 的终点. 有时把箭向 x 表示为 x: $s(x)\rightarrow t(x)$. Q 的子 Quiver $Q'=(Q'_0,Q'_1,s',t')$ 是使得 $Q'_0\subseteq Q_0$，$Q'_1\subseteq Q_1$，$s'=s|_{Q'_1}$，$t'=t|_{Q'_1}$ 的有向图.

Q 中的一条路是箭向的有限序列 $p=x_1x_2\cdots x_n$，且对每个 $i=1,\cdots,n-1$，$t(x_i)=s(x_{i+1})$. 在这种情况下，令 $s(p)=s(x_1)$，$t(p)=t(x_n)$. 一条路 p 的长度是组成它的箭向的个数. 特别地，把点看作平凡路或者长度为零的路. 对任意平凡路 a，令 $s(a)=a=t(a)$. 并且对任意路 p 使得 $s(p)=a$(或者 $t(p)=a$)，则把毗邻的路 ap 和 p 看作是一样的. 称长度 $l\geqslant 1$ 的路是循环的，如果它的始点和终点是重合的.

在下面的叙述中，假设读者熟悉余代数的基本理论. 把文献[5-7]作为余代数和余模的基本参考文献，本文未交代的一些概念和术语可在这些文献

收稿日期: 2015-11-29
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271119); 北京市自然科学基金资助项目(1122002).
作者简介: 姚海楼(1963—)，男，教授，博士生导师，主要从事代数表示论、同调代数、序代数方面的研究，E-mail: yaohl@bjut.edu.cn

里找到.

设 Q 是 Quiver,k 是域. Q 的路余代数是 k-向量空间 kQ,所有路的集合是它的一组基,它的余乘法和余单位定义为:对任意点 a,定义 $\Delta(a)=a\otimes a$ 与 $\varepsilon(a)=1$. 而对任意长度大于零的路 $p=x_1\cdots x_n$,定义

$$\Delta(p)=s(p)\otimes p+\sum_{i=1}^{n-1}x_1\cdots x_i\otimes x_{i+1}\cdots x_n+p\otimes t(p)=\sum_{p_1p_2=p}p_1\otimes p_2$$

与

$$\varepsilon(p)=0$$

正如一些文献(如文献[8])中所指出的,单子余代数只控制 Quiver 中的点. 但是,它们不控制 Quiver 中的箭向. 因为这个缘故,人们的兴趣在单余代数的推广——素子余代数的有关问题上. 为此,先回忆余代数里子余代数楔积的概念.

令 A 和 B 是域 k 上余代数 C 的 2 个子余代数,则在 C 中 A 和 B 的楔积[5],记为 $A\wedge^C B$,定义为

$$A\wedge^C B=\mathrm{Ker}\left(C\to C\otimes C\to\frac{C}{A}\otimes\frac{C}{B}\right)=\Delta^{-1}(C\otimes B+A\otimes C)=(A^{\perp C^*}B^{\perp C^*})^{\perp C}$$

如果 A 和 B 是子余代数,那么 $A+B\subseteq A\wedge^C B$,且 $A\wedge^C B$ 是 C 的子余代数. 一般情况下,$A\wedge^C B\neq B\wedge^C A$.

定义 1[8] 余代数 C 称为是素的,如果对 C 的任意 2 个子余代数 A 和 B,由 $C=A\wedge^C B$,可推出 $C=A$,或者 $C=B$.

由文献[8],有下面的结论.

引理 1[8] 令 D 是余代数 C 的子余代数,则下列叙述是等价的:

1) D 是素余代数;

2) 对 C 的子余代数 A 和 B 使得 $D\subseteq A\wedge^C B$,则有 $D\subseteq A$,或者 $D\subseteq B$.

命题 1[8] 令 D 是余代数 C 的素子余代数,则对任意非零幂等元 $e\in C^*$,有 $eDe\subseteq eCe$ 是素子余代数.

还需要"局部化"概念. 局部化是由许多学者从不同观点角度发展起来的理论. 其中最著名的过程是交换环里作为增加乘法逆的系统方法的局部化. 在文献[9]中,Gabriel 描述了阿贝尔范畴和 Grothendieck 范畴的局部化. 这表现为到一个新范畴——商范畴——上的函子. 这个函子有右伴随函子——section 函子. Navarro 于文献[10]中在余模范畴(为有限型的 Grothendieck 范畴)里发展了 Gabriel 的思想. 该理论的关键在于这个商范畴变成了一个余模范畴,从而较任意代数上的模范畴情形更易于理解.

1 余代数的 Krull 维数

本文自始至终一直用 C 表示一个余代数,$C\neq 0$,且用 C^* 表示 C 的对偶代数. 通过定义[10]

$$c\leftharpoonup f=\sum_c f(c_1)c_2$$

与

$$f\rightharpoonup c=\sum_c f(c_2)c_1$$

的作用使余代数 C 分别成为一个右 C^*-模和左 C^*-模. 这里 $f\in C^*$ 和 $c\in C$ 满足使用 Sweedler 的西格玛符号的公式 $\Delta(c)=\sum_c c_1\otimes c_2$[5]. 为简便起见,分别用 cf 和 fc 记 $c\leftharpoonup f$ 和 $f\rightharpoonup c$. 对每个非零幂等元 $e\in C^*$,向量空间 eCe 通过余乘和余单位运算(对任 $x\in C$) $\Delta_{eCe}(exe)=\sum_c ex_1e\otimes ex_2e$ 与 $\varepsilon_{eCe}(exe)=\varepsilon(x)$ 成为余代数. 对任意 $x\in C$,令 $\phi(x)=exe$,则 ϕ: $C\to eCe$ 是一个线性映射. 该线性映射 ϕ 满足 $\Delta_{eCe}\phi(c)=(\phi\otimes\phi)\Delta_C(c)$,其中 $c\in C$. 用 T_e 记商函子 Cohom $(Ce,-):C\to eCe$(文献[11]).

受文献[1]的启发,引入下面的概念:

$n+1$ 个素子余代数的有限序列 $P_0\supset P_1\supset\cdots\supset P_n$ 称为余代数 C 中长度是 n 的素链. 为叙述方便起见,用 $\mathrm{Spec}(C)$ 记 C 中的所有素子余代数的集合.

定义 2 如果 $P\in\mathrm{Spec}(C)$,$P=P_0$ 的素链长度的上确界称为 P 的高度,并记为 $\mathrm{ht}(P)$.

注 1 由定义 2,易见 $\mathrm{ht}(P)=0$ 意味着 P 是 C 的极小素子余代数,亦即,P 是 C 的极小子余代数(也就是 C 的单子余代数).

令 D 是 C 的真子余代数,定义 D 的高度为所有包含 D 的素子余代数 P 的高度的最小值:

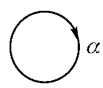
$$\mathrm{ht}(D)=\inf\{\mathrm{ht}(P)\mid P\supseteq D\}$$

下面引进余代数 C 的 Krull 维数概念.

定义 3 余代数 C 的 Krull 维数定义为 C 中素子余代数高度的上确界:

$$\mathrm{Kdim}(C)=\sup\{\mathrm{ht}(P)\mid P\in\mathrm{Spec}(C)\}$$

注 2 如果 $\mathrm{Kdim}(C)$ 是有限的,则它等于 C 中最长素链的长度. 例如,令 C 是如下 Quiver Q 定义的余代数:



则 $C=kQ$ 有 $\mathrm{Kdim}(C)=1$.

由文献[10]，对于 2 个幂等元 $f,g\in C^*$，称 f 与 g 等价，如果内射右 C-余模 Cf 与 Cg 是等价的. 一个幂等元 $e\in C^*$ 称为是左(右)半中心的，如果 $eC=eCe$ ($Ce=eCe$). 或等价地，如果 eC (Ce) 是 C 的子余代数(见文献[11]).

定理 1　令 D 是余代数 C 的任意素子余代数，设 e 是 C^* 中相伴于 $\mathrm{soc}\,D$ 的半中心幂等元，则有 $\mathrm{ht}(D)\leqslant \mathrm{Kdim}T_e(C)=\mathrm{Kdim}(eCe)$.

注意：显然，$\mathrm{soc}\,D$ 是 $\mathrm{soc}\,C$ 的直和加项，不妨设 $\mathrm{soc}\,C=\mathrm{soc}\,D\oplus S_0$，这里 e 相伴于 $\mathrm{soc}\,D$ 的意思是：$e(\mathrm{soc}\,D)e=\mathrm{soc}\,D$，而 $e(S_0)e=0$.

证明：因为 e 是 C^* 中相伴于 $\mathrm{soc}\,D$ 的半中心幂等元，有 $T_e(C)=\mathrm{Cohom}(Ce,C)=eC=eCe$. 因此，$\mathrm{Kdim}T_e(C)=\mathrm{Kdim}(eCe)$. 不失一般性，可假设 $n+1$ 个素子余代数的有限序列 $P_0\supset P_1\supset\cdots\supset P_n$ 为 C 中长度是 n 的素链，这里 $P_i\neq P_{i+1}$ ($i=1,2,\cdots,n$). 显然，由定义 2，$\mathrm{ht}(D)=n$. 同时，可得到

$$\overline{P}_0(C)=\mathrm{Cohom}(Ce,P_0)\supseteq\overline{P}_2(C)=$$
$$\mathrm{Cohom}(Ce,P_1)\supseteq\cdots\supseteq\overline{P}_n(C)=\mathrm{Cohom}(Ce,P_n)$$

易证 $\overline{P}_i$ ($i=1,2,\cdots,n$) 也是 $T_e(C)=eCe$ 的素子余代数. 的确，由于 P_i 是素子余代数，由引理 1 和命题 1，得到 $eP_ie=\overline{P}_i\subseteq eCe$ 是素子余代数，这里 $i=1,2,\cdots,n$. 由文献[10]，知道每个内射右 C-余模 E 均具有形式 $E=Ce$，其中 $e\in C^*$ 是某个幂等元. 所以，在内射余模的等价类与对偶代数的幂等元等价类之间存在一一对应. 因为 $P_i\neq P_{i+1}$ ($i=1,2,\cdots,n$)，故易见 $\overline{P}_i\neq\overline{P}_{i+1}$ ($i=1,2,\cdots,n$). 因此，$\overline{P}_0\supset\overline{P}_1\supset\cdots\supset\overline{P}_n$ 也是 eCe 中长度为 n 的素链. 令 $\mathrm{Kdim}(eCe)=m$. 因为 $\mathrm{Kdim}(eCe)=\sup\{\mathrm{ht}(\overline{P})\mid\overline{P}\in\mathrm{Spec}(eCe)\}$，故 m 是 eCe 中所有素链长度的上确界. 所以，$n\leqslant m$，即

$$\mathrm{ht}(D)\leqslant\mathrm{Kdim}T_e(C)=\mathrm{Kdim}(eCe)$$

成立.

注 3　如果 D 是余代数 C 的子余代数，与上面定理证明类似，可证 $\mathrm{ht}(D)\leqslant\mathrm{Kdim}T_e(C)$.

命题 2　$\phi: C\to eCe$ 是由 $\phi(x)=exe$ ($x\in C$) 定义的线性映射，eDe 是 eCe 的素子余代数，则 C 的含有 $\mathrm{Ker}\,\phi$ 的所有子余代数 D 是素子余代数.

证明：设 $H,L\subseteq C$ 是使得 $D\subseteq H\wedge L$ 的子余代数，这里 $H=H'+\mathrm{Ker}\,\phi$，$L=L'+\mathrm{Ker}\,\phi$，$D=D'+\mathrm{Ker}\,\phi$，而 H'、L'、D' 是 C 的不包含 $\mathrm{Ker}\,\phi$ 的子余代数，则

$$\phi(D)=eDe\subseteq\phi(H\wedge L)\subseteq\phi(H)\wedge\phi(L)$$

由于 eDe 是 eCe 的素子余代数，得 $\phi(D)=eDe\subseteq\phi(H)$ 或 $\phi(D)=eDe\subseteq\phi(L)$. 因为

$$\phi^{-1}\phi(D)=\phi^{-1}\phi(D'+\mathrm{Ker}\,\phi)=$$
$$D'+\mathrm{Ker}\,\phi+\mathrm{Ker}\,\phi=D'+\mathrm{Ker}\,\phi=D$$

类似地，还可得到 $\phi^{-1}\phi(D)\subseteq\phi^{-1}\phi(H)=H$ 与 $\phi^{-1}\phi(D)\subseteq\phi^{-1}\phi(L)=L$. 因此，或者 $D=\phi^{-1}\phi(D)\subseteq\phi^{-1}\phi(H)=H$，或者 $D=\phi^{-1}\phi(D)\subseteq\phi^{-1}\phi(L)=L$. 所以，$C$ 的含有 $\mathrm{Ker}\,\phi$ 的子余代数 D 是素子余代数.

推论 1　令 $\phi: C\to eCe$ 是由 $\phi(x)=exe$ (其中 $x\in C$) 定义的线性映射，D 是余代数 C 的含有 $\mathrm{Ker}\,\phi$ 的任意素子余代数. 设 e 是 C^* 中相伴于 $\mathrm{soc}\,D$ 的半中心幂等元，则有 $\mathrm{ht}(D)=\mathrm{Kdim}T_e(C)=\mathrm{Kdim}(eCe)$.

证明：由定理 1 的证明知道，$\mathrm{ht}(D)\leqslant\mathrm{Kdim}T_e(C)=\mathrm{Kdim}(eCe)$. 另一方面，设 $\mathrm{Kdim}(eCe)=m$，$\mathrm{ht}(D)=n$. 因为 $\mathrm{Kdim}(eCe)=\mathrm{Sup}\{\mathrm{ht}(P)\mid P\in\mathrm{Spec}(eCe)\}$，所以 m 是 eCe 的所有素链的上确界. 不失一般性，可设 $m+1$ 个素子余代数的有限序列 $\overline{P}_0\supset\overline{P}_1\supset\cdots\supset\overline{P}_m$ 是 eCe 的长度为 m 的素链，这里 $\overline{P}_i\neq\overline{P}_{i+1}$ ($i=1,2,\cdots,m$). 于是，得 $\overline{P}_0(C)=\mathrm{Cohom}(Ce,P_0)\supseteq\overline{P}_2(C)=\mathrm{Cohom}(Ce,P_1)\supseteq\cdots\supseteq\overline{P}_m(C)=\mathrm{Cohom}(Ce,P_m)$. 容易验证 $P_0,P_1,\cdots,P_m$ 是 C 包含 $\mathrm{Ker}\,\phi$ 的子余代数. 于是，由命题 2 知 P_i ($i=1,2,\cdots,m$) 是 C 的素子余代数. 因为 $\overline{P}_i\neq\overline{P}_{i+1}$ ($i=1,2,\cdots,m$)，易见 $P_i\neq P_{i+1}$ ($i=1,2,\cdots,m$) 且 $P_0\supset P_1\supset\cdots\supset P_m$. 令 $D=P_m$. 由 $\mathrm{ht}(D)=n$ 的定义，有 $m\leqslant n$.

注 4　如果 D 是余代数 C 的含有 $\mathrm{Ker}\,\phi$ 的任意子余代数，用上面证明的类似方法也可证得 $\mathrm{ht}(D)=\mathrm{Kdim}T_e(C)=\mathrm{Kdim}(eCe)$.

定理 2　令 D 是余代数 C 的任意素子余代数，e 是 C^* 中相伴于 $\mathrm{soc}\,D$ 的半中心幂等元. 假设 I 是 C 的余理想，且 I 生成子余代数 D，则有 $\mathrm{ht}(D)+\mathrm{Kdim}(C/I)\leqslant\mathrm{Kdim}\,C$

证明：假设 $\mathrm{ht}(D)=n$ 与 $\mathrm{Kdim}(C/I)=m$. 令 $\overline{Q}_0\supset\overline{Q}_1\supset\cdots\supset\overline{Q}_m$ 是 C/I 里素子余代数的极大链，则由 $Q\subseteq C$ 是素子余代数当且仅当 $\overline{Q}$ 是 C/I 里的素子余代数的事实知，$Q_0\supset Q_1\supset\cdots\supset Q_m$ 是 C 的素子余代数链. 同时，令 $P_0\supset P_1\supset\cdots\supset P_n$ 是 C 中素子余代数的极大链且 $D=Q$，则 $Q_0\supset Q_1\supset\cdots\supset Q_m\supset P_0\supset P_1\supset\cdots\supset P_n$ 是 C 中的素子余代数链. 因此，有 $m+n\leqslant\mathrm{Kdim}\,C$，亦即，$\mathrm{ht}(D)+\mathrm{Kdim}(C/I)\leqslant\mathrm{Kdim}\,C$.

令 (M,ρ) 是右 C-余模. 由根据文献[12]，在余代数 C 中存在唯一的极小子余代数 $\mathrm{cf}(M)$ 使得

$\rho(M) \subseteq M \otimes \mathrm{cf}(M)$,亦即,$M$ 是右 $\mathrm{cf}(M)$-余模. 这个余代数 $\mathrm{cf}(M)$ 称为是 M 的系数空间.

定义 4 令 $M \neq 0$ 是 C-余模,定义余模 M 的 Krull 维数为 $\mathrm{Kdim}(M) = \mathrm{Kdim}(\mathrm{cf}(M))$.

特别,当 $M = 0$ 时,置 $\mathrm{Kdim}(M) = -1$.

2 诺特余代数

为了利用余模 M 的 Krull 维数研究余模和余代数的性质,引进诺特余代数概念如下.

定义 5 令 T 是 C-余模 M 的子集. 如果 N 是所有包含子集 T 的子余模的交集,则称子余模 N 是由 T 生成的. 如果 T 是有限子集,则称 N 是有限生成的.

容易证明下面的命题.

命题 3 令 C 是余代数. 如果 C-余模 M 作为有理 C^*-模是有限生成的,则 M 作为 C-余模是有限生成的.

命题 4 令 C 是余代数,M 是 C-余模,$m \in M$,则由 m 生成的子余模是有限维的.

证明 将表示出一个含有 m 的有限维子余模,从而所有包含 m 的子余模的交集是有限维的. 事实上,这个子余模是 C^* 的某个有限生成子模.

令"$\rightharpoonup$"记 C^* 在 M 上的左 C^*-模作用,这里 M 是 C-余模,余模乘法为 ρ_M. "$\rightharpoonup$"作用由

$$c^* \rightharpoonup m = \sum_m m_{(1)} < c^*, m_{(2)} >$$

给出.

由于 M 在"$\rightharpoonup$"作用下是有理 C^*-模,故 $N = C^* \rightharpoonup m$(由 m 生成的子模)是有理的和有限维的. 这是因为它是有理模的子模(见文献[5]),因此,N 作为 C-余模是有限维的. 为得到下面结果,引进一些记号. C-余模 M 称为单的,如果 M 没有非零子余模(见文献[3]). 一个 C-余模 M 称为是有限长度的,如果存在子余模的有限滤链 $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$ 使得滤链因子 M_i/M_{i+1} 或者为零或者为单余模($i = 0, 1, \cdots, n-1$). 如果没有滤链因子 M_i/M_{i+1} 为零,则这样的滤链 F 称为余模的 M 合成列. 定义 $l_F(M)$ 为 $\sum m_S^F(M)$,这里的和遍历所有单 C-余模. 定义 M 的长度为 $l(M)$ 为所有 $l_F(M)$ 的最小值,而 $m_S^F(M)$ 是 M 的滤链 F 中与单余模 S 同构的滤链因子个数,并令 $m_S(M)$ 为所有 $m_S^F(M)$ 的最小值,这里 F 遍历 M 所有合成列.

定义 6[13] 如果余代数 C 里面关于子余代数的升链(或降链)条件成立,则称它为诺特的(或阿廷的).

注 5 余代数 C 是诺特的当且仅当 C 的每个子余代数是有限生成 C-余模.

类似地,可引进诺特余模的概念.

定义 7 C-余模 M 称为诺特的,如果 M 的每个 C-子余模是有限生成的.

引理 2 余代数 C 是诺特的当且仅当 C 作为左 C-余模和右 C-余模的长度都是有限的.

证明: 如果 C 作为左 C-余模和右 C-余模的长度都是有限的,则 C 是诺特的,这是因为任一个子余代数可视为左 C-余模和右 C-余模.

反过来,若 C 是诺特的,则 C 有限生成余代数. 因此,由文献[5]知 C 在它的基域 k 是有限维的. 因为 C 中的左子余模和右子余模均为 k 上的向量空间,故 C 中的每个左(右)子余模链是有限的. 因此,逆过来的结论也成立.

定理 3 令 C 是一个余代数,M 是一个 C-余模. 若系数空间 $\mathrm{cf}(M)$ 是诺特的,则 $\mathrm{Kdim}(M) = 0$.

证明: 因为 $\mathrm{cf}(M)$ 是诺特的,故 $\mathrm{cf}(M)$ 中仅有有限多个极小子余代数(亦即,单子余代数). 将其分别记为 $P_1, P_2, \cdots, P_s$. 易见存在某个自然数 r 使得 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_s)^r = \mathrm{cf}(M)$. 令 P 是 $\mathrm{cf}(M)$ 中任一个素子余代数,则 $P \subseteq \mathrm{cf}(M) = (P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_s)^r$. 于是,存在某个 $i(1 \leq i \leq r)$ 使得 $P \subseteq P_i$. 由 P_i 的极小性,知道 $P_i = P$. 所以,$\mathrm{Kdim}(\mathrm{cf}(M)) = 0$,从而 $\mathrm{Kdim}(M) = 0$.

引理 3 令余代数 C 是诺特的,M 有限生成 C-余模,则 M 是一个诺特 C-余模.

证明: 令 N 是 M 的任意一个子余模. 由于 M 有限生成 C-余模,由命题 4,M 是有限维的,从而 M 的长度是有限的. 再由于 C 是诺特的,根据引理 2,C 作为左 C-余模和右 C-余模的长度都是有限的. 因此,N 的长度是有限的,从而 N 有限生成 C-余模. 由定义 7,M 是一个诺特 C-余模.

命题 5 C-余模 M 有合成列当且仅当 M 是诺特的与阿廷的.

证明 必要性:如果 C-余模 M 有合成列,则 M 中的所有链都是有界的. 因此,M 是诺特的与阿廷的.

充分性:可设 $M \neq 0$. 令 $\Sigma = \{N \mid N$ 是 M 的子余模且 $N \neq M\}$. 由于 M 是诺特的,故 Σ 有极大元 M_1. 因为 M_1 是诺特,故 M_1 有极大真子余模. 于是,M_1/M_2 是单的,从而可得到一个余模降链 $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$ 使得 M_{i-1}/M_i 为单余模. 又由于

M 是阿廷 C-余模，故存在某个自然数 n 使得 $M_n = 0$. 因此，$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$，即，$M$ 有合成列.

定理 4　令 C 是阿廷余代数且 $M \neq 0$ 是 C-余模，则下列条件是等价的：

1）M 是有限长度的 C-余模.

2）系数子余代数 $\mathrm{cf}(M)$ 是诺特的.

3）$\mathrm{Kdim}(M) = 0$.

证明：1）$\Rightarrow$2）：由于 M 是有限长度的，则 M 是有限维的，因此，$\mathrm{cf}(M)$ 是有限维的. 又因为 C 是阿廷的，故 $\mathrm{cf}(M)$ 作为左 $\mathrm{cf}(M)$-余模和右 $\mathrm{cf}(M)$-余模都是有限长度的. 由定义 7，知道 $\mathrm{cf}(M)$ 是诺特的.

2）$\Rightarrow$1）：因为 M 是 C-余模，故 M 也是 $\mathrm{cf}(M)$-余模. 由引理 2，得到 $\mathrm{cf}(M)$ 作为左 $\mathrm{cf}(M)$-余模和右 $\mathrm{cf}(M)$-余模都是有限长度的. 因此，$\mathrm{cf}(M)$ 是有限维的，从而 M 作为 $\mathrm{cf}(M)$-余模是有限维的. 因为 C 是阿廷的，故 M 作为 C-余模是有限维的. 所以，M 是有限长度的 C-余模.

2）$\Rightarrow$3）：由定理 3.

3）$\Rightarrow$2）：假设 $\mathrm{Kdim}(M) = 0$，则 $\mathrm{Kdim}(M) = \mathrm{Kdim}(\mathrm{cf}(M)) = 0$. 因此，$\mathrm{cf}(M)$ 仅有极小素子余代数（亦即，单子余代数）. 因为 C 是阿廷的，故 C 的子余代数的任意非空集合有极小元. 因此，$\mathrm{cf}(M)$ 作为左 $\mathrm{cf}(M)$-余模和右 $\mathrm{cf}(M)$-余模都是有限长度的. 由引理 2，$\mathrm{cf}(M)$ 是诺特的.

注 6　显然，余代数 $C \neq 0$ 有零 Krull 维数当且仅当它的所有素子余代数都是极小的.

3　结论

1）设 D 是余代数 C 的任意素子余代数，设 e 是 C^* 中相伴于 $\mathrm{soc}\, D$ 的半中心幂等元，则有 $\mathrm{ht}(D) \leqslant \mathrm{Kdim} T_e(C) = \mathrm{Kdim}(eCe)$.

进一步，如果 I 是 C 的余理想，且 I 生成子余代数 D，则有 $\mathrm{ht}(D) + \mathrm{Kdim}(C/I) \leqslant \mathrm{Kdim}(C)$.

2）令 C 是一个余代数，M 是一个 C-余模. 如果系数空间 $\mathrm{cf}(M)$ 是诺特的，则 $\mathrm{Kdim}(M) = 0$. 进一步，如果 C 是阿廷余代数且 $M \neq 0$，则 M 是有限长度的 C-余模，当且仅当其系数子余代数 $\mathrm{cf}(M)$ 是诺特的，当且仅当 $\mathrm{Kdim}(M) = 0$.

参考文献：

[1] MATSUMURA H. Commutative algebra [M]. Tokyo: The Benjamin/Cumming Publishing Company Inc, 1980: 1-176.

[2] CHIN W, MONTGOMERY S. Basic coalgebras [J]. AMS/IP Stud Adv Math Amer Math Soc ler, 1997, l(4): 41-47.

[3] NICHOIS W D. Bialgebras of type one [J]. Comm Algebra, 1978, 6(15): 1521-1552.

[4] ASSEM I, SIMSON D, SKOWRONSKI A. Elements of the representation theory of associative algebras: techniques of representation theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005: 41-68.

[5] SWEEDLER M. Hopf algebras [M]. New York: Benjamin, Inc, 1969: 1-197.

[6] ABE E. Hopf algebras [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1997: 122-162.

[7] MONTGOMERY S. Hopf algebras and their actions on rings [M] // CBMS. Amer math soc: vol 82. Rhode Island: American Mathematical Society Providence, 1993: 1-16.

[8] JARA P, MERINO L, NAVARRO G, et al. Prime path coalgebras [J]. The Arabian Journal for Scienceand Engineering, 2008, 33(2): 273-283.

[9] GABRIEL P. Des catégories ablennes [J]. Bull Soc Math France, 1962, 90: 2775-2794.

[10] GABRIEL N G. Representation theory of coalgebras: localization in coalgebras [D]. Granada: Universidad de Granada, 2006.

[11] NAVARRO G. Some remarks on localization in coalgebras [J]. Comm Algebra, 2008, 36(9): 3447-3466.

[12] GREEN J A. Locally finite representations [J]. J Algebra, 1976, 41: 137-171.

[13] HEYNEMAN G. R. Reflexivity and coalgebras of finite type [J]. J Algebra, 1974, 28: 215-246.

（责任编辑　吕小红）