第41卷 第9期
2015年 9月
北 京 工 业 大 学 学 报
JOURNAL OF BEIJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Vol. 41 No. 9
Sept. 2015

# 形式幂级数环的表现维数

郭 莹, 姚海楼
(北京工业大学 应用数理学院, 北京 100124)

**摘 要**: 为了研究形式幂级数环的表现维数,基于对环与模的有限表现维数的研究,运用同调代数上的理论与方法,得到了 $R$、$R[[x]]$ 为凝聚环时,模的表现维数之间的关系以及环的表现维数之间的关系等结论.

**关键词**: 形式幂级数环; 表现维数; 凝聚环
**中图分类号**: O 153.3　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 0254-0037(2015)09-1437-04
**doi**: 10.11936/bjutxb2015010044

# Presented Dimensions of Formal Power Series Rings

GUO Ying, YAO Hai-lou
(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract**: Based on the research of finitely presented dimensions of modules and rings and by using the theory and method of homological algebra, presented dimensions of formal power series rings were described, and the relationship was obtained between presented dimensions of modules as well as between presented dimensions of rings when $R$, $R[[x]]$ are coherent rings.

**Key words**: formal power series ring; presented dimension; coherent ring

令 $R$ 为环,$n$ 为非负整数. 由文献[1-2],右 $R$-模 $M$ 称为 $n$-表现的,若它有有限的 $n$-表现,即存在右 $R$-模的正合列

$$F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

其中每个 $F_i$ 是有限生成的自由(或投射)右 $R$-模. 显然,一个模是0-表现的(或1-表现的)当且仅当它是有限生成的(或有限表现的). 若 $m \geqslant n$,则每个 $m$-表现的模是 $n$-表现的.

在文献[3]中,周德旭等定义了模的表现维数,令 $M$ 是右 $R$-模,记 $M$ 的表现维数为

$\mathrm{FPd}(M) = \inf\{m \mid$ 存在投射分解 $\cdots \to P_{m+j} \to \cdots P_m \to P_{m-1} \to \cdots P_0 \to M \to 0$ 使 $P_{m+i}, i = 0, 1, 2 \cdots$ 是有限生成的$\}$

若没有这样的分解,记 $\mathrm{FPd}(M) = \infty$. 特别地,若 $\mathrm{FPd}(M) = 0$,则 $M$ 有无限的有限表现,此时,称 $M$ 为强表现模.

关于环 $R$ 的表现维数,有

$\mathrm{FPD}(R) = \sup\{\mathrm{FPd}(M) \mid M$ 是有限生成右 $R$-模$\}$

易知,$\mathrm{FPD}(R) = 0 \Leftrightarrow$ 每个有限生成模有无限的有限表现 $\Leftrightarrow$ 每个有限生成模是有限表现的 $\Leftrightarrow R$ 是右诺特的.

由上可知,通过表现维数可衡量出一个模是否有无限的有限表现,也可衡量出一个环是否是诺特的. 本文中,研究形式幂级数环的表现维数,环为带有单位元的环,模为右 $R$-模且是酉模,$\mathscr{M}_R$ 为右 $R$-模的范畴,$\mathrm{WD}(R)$ 为 $R$ 的弱维数,$\mathrm{GD}(R)$ 为 $R$ 的整体维数. 相关文献及符号见文献[4-7].

## 1 一些引理

**引理 1**[8] 设 $R_1$、$R_2$ 为环,$f: R_1 \to R_2$ 为环同态,且通过 $f$,$R_2$ 成为有限表现的 $R_1$-模,则对任意 $R_2$-模 $M$,$M$ 为强表现的 $R_2$-模 $\Leftrightarrow M$ 为强表现的 $R_1$-模.

**引理 2**[3] 若 $\mathrm{FPd}(M_1), \cdots, \mathrm{FPd}(M_n)$ 是有限的,则

收稿日期: 2015-01-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271119); 北京市自然科学基金资助项目(1122002)
作者简介: 郭 莹(1983—), 女, 博士研究生,主要从事代数表示论方面的研究,E-mail:gykyxx@emails.bjut.edu.cn

$$\mathrm{FPd}(M_1\oplus\cdots\oplus M_n)=\max\{\mathrm{FPd}(M_i)\mid i=1,\cdots,n\}$$

**引理 3**[3] 假设 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是右 $R$-模的正合列，$\mathrm{FPd}(M')=d'$，$\mathrm{FPd}(M)=d$，$\mathrm{FPd}(M'')=d''$. 若其中 2 个是有限的，则第 3 个也是有限的，进而

1) $d\leqslant\max\{d',d''\}$；

2) $d''\leqslant\max\{d,d'+1\}$；

3) $d'\leqslant\max\{d,d''-1\}$.

**引理 4**[3] 有限生成右 $R$-模的表现维数不为 1；进一步，任意环 $R$ 的表现维数不为 1.

## 2 形式幂级数环的表现维数

首先回顾一下形式幂级数环与模的相关知识.

设 $R$ 为一个环，$A$ 为一个 $R$-模，$x$ 为一个符号，定义形式幂级数环为 $R[[x]]=\left\{\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i\mid a_i\in R\right\}$，给出 $R[[x]]$ 中 2 个元 $\alpha(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i$，$\beta(x)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}b_jx^j$，定义加法和乘法为

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i+\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i=\sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)x^i$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\cdot\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j=\sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)x^s$$

易证 $A[[x]]$ 为一个 $R[[x]]$-模. 同时 $R[[x]]$ 可看成一个 $R$-模. 显然，有嵌入环同态 $f_1:R\to R[[x]]$ 以及自然环同态 $f_2:R[[x]]\to R$，使得 $f_2\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)=a_0$. 于是，任意 $M\in\mathscr{M}_R$，通过 $f_2$，$M$ 成为 $R[[x]]$-模，记为 $M_{R[[x]]}$，任意 $M^*\in\mathscr{M}_{R[[x]]}$，通过 $f_1$，$M^*$ 成为 $R$-模，记为 $M_R^*$.

**引理 5**[9] 令 $R$ 是完备凝聚交换代数，则作为右 $R$-模，形式幂级数环 $R[[x]]$ 是平坦的；进一步，有 $M[[x]]\cong M\otimes_R R[[x]]$.

**推论 1** 令 $R$ 是完备凝聚交换环，则

1) 若 $M$ 是自由 $R$-模，则 $M[[x]]$ 是自由 $R[[x]]$-模；

2) 若 $M$ 是投射 $R$-模，则 $M[[x]]$ 是投射 $R[[x]]$-模.

**定理 1** 设 $R$、$R[[x]]$ 均为完备凝聚交换环，任意 $M\in\mathscr{M}_R$，有

1) 若 $\mathrm{FPd}(M_R)=0$，则 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=0$；

2) 若 $\mathrm{FPd}(M_R)\geqslant 1$，则

$$\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=\mathrm{FPd}(M_R)+1$$

从而又有

3) 若 $\mathrm{FPD}(R)=0$，则 $\mathrm{FPD}(R[[x]])=0$；

4) 若 $0<\mathrm{FPD}(R)<+\infty$，则

$$\mathrm{FPD}(R[[x]])\geqslant\mathrm{FPD}(R)+1$$

证明：1) 若 $\mathrm{FPd}(M_R)=0$，则 $M$ 为强表现 $R$-模. 考虑自然环同态 $\pi:R[[x]]\to R$，则有 $R[[x]]$-模的正合列

$$0\to R[[x]]\xrightarrow{\tau}R[[x]]\xrightarrow{\pi}R\to 0\qquad(1)$$

其中，$\tau(f(x))=f(x)x$，$\pi(f(x))=f(0)$，对任意 $f(x)\in R[[x]]$. 于是，通过 $\pi$，$R$ 成为有限表现的 $R[[x]]$-模，由引理 1，可得 $M$ 是强表现 $R[[x]]$-模，即 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=0$.

2) 若 $\mathrm{FPd}(M_R)=n\geqslant 1$，用数学归纳法证明 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=n+1$.

①设 $\mathrm{FPD}(M_R)=1$，考虑非有限生成自由 $R$-模 $F=\oplus R$，则类似于式(1)可得 $R[[x]]$-模正合列：$0\to F[[x]]\to F[[x]]\to F\to 0$，其中 $F[[x]]=R[[x]]\otimes_R F$ 为自由 $R[[x]]$-模(由引理 5 和推论 1 可得)，于是有 $\mathrm{FPd}(F_{R[[x]]})\leqslant 2$，再由引理 1 可得 $1\leqslant\mathrm{FPd}(F_{R[[x]]})\leqslant 2$. 若 $\mathrm{FPd}(F_{R[[x]]})=1$，则有 $F$ 作为 $R[[x]]$-模的正合列 $0\to K^*\xrightarrow{i}P^*\xrightarrow{\pi}F\to 0$，这里 $P^*$ 为非有限生成投射 $R[[x]]$-模，$K^*$ 为强表现 $R[[x]]$-模，对任意 $p\in P^*$，$\pi(xp)=x\pi(p)=0$，$\pi(p)\in F$，$x\in a_{nn}(F)$(即对任意 $a\in F$，都有 $xa=0$)，于是 $xp\in i(K^*)$. 取投射 $R[[x]]$-模 $Q^*$，使 $P^*\oplus Q^*=F^*$ 为自由 $R[[x]]$-模，因 $i(K^*)$ 有限生成，故存在 $F^*$ 的直和分解 $F^*=F_1^*\oplus F_2^*$，其中 $i(K^*)\subset F_1^*$，$F_1^*$ 为有限生成的自由 $R[[x]]$-模，$F_2^*$ 为自由 $R[[x]]$-模. 又因 $P^*$ 为 $F^*$ 的一个非有限生成的直和项，所以 $P^*\not\subset F_1^*$，则存在 $p_1\in P^*$，使 $p_1\notin F_1^*$. 设 $F_1^*$ 和 $F_2^*$ 的一组基分别为$(y_1,\cdots,y_k,\cdots)$和$\{z_j\}_{j\in J}$，则有 $p_1=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i'y_i+\sum\limits_{j\in J}\lambda_j''z_j$，式中：$\lambda_j''$ 不全为零；$\lambda_i'$、$\lambda_j''\in R[[x]]$. 再由 $xp_1\in i(K^*)\subset F_1^*$，得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}k_i'y_i=xp_1=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x\lambda_i'y_i+\sum\limits_{j\in J}x\lambda_j''z_j$，则有 $x\lambda_j''=0$，对任意 $j\in J$. 而 $x$ 为未定元，故 $\lambda_j''=0$. 这与 $p_1\notin F_1^*$ 矛盾，故 $\mathrm{FPd}(F_{R[[x]]})\neq 1$，$\mathrm{FPd}(F_{R[[x]]})=2$. 类似地，由 $P^*$ 为非有限生成投射 $R$-模，仿上可证 $\mathrm{FPd}(P^*_{R[[x]]})\geqslant 2$，又因 $P^*\oplus Q^*=F^*$ 为自由 $R[[x]]$-模，由引理 2，$\mathrm{FPd}(P^*_{R[[x]]})\leqslant\mathrm{FPd}(F^*_{R[[x]]})\leqslant 2$，则 $\mathrm{FPd}(P^*_{R[[x]]})=2$.

设 $\mathrm{FPd}(M_R)=1$，考虑 $R$-模 $M$ 的正合列：$0\to K\to P\to M\to 0$，这里 $P$ 为投射 $R$-模，$K$ 为强表现模，该正合列可视为 $R[[x]]$-模的正合列，由上面证明可知：$\mathrm{FPd}(K_{R[[x]]})=0$，$\mathrm{FPd}(P_{R[[x]]})=2$，由引理 3，

有 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})\leqslant 2$ 和 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})\geqslant \mathrm{FPd}(P_{R[[x]]})=2$，所以，$\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=2$.

②设 $\mathrm{FPd}(M_R)=2$，由引理1及上面的证明可知 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})\geqslant 2$. 考虑 $M$ 的正合列：$0\to K\to P\to M\to 0$，这里 $P$ 为投射 $R$-模，$\mathrm{FPd}(K_R)=1$，于是 $\mathrm{FPd}(P_{R[[x]]})\leqslant 2$，$\mathrm{FPd}(K_{R[[x]]})=2$. 由引理3，$\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})\leqslant 3$. 下证 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})\neq 2$. 若 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=2$，可作 $R[[x]]$-模的正合列

$$0\to K^*\to F^*\to M\to 0$$

这里 $F^*$ 为自由 $R[[x]]$-模，$\mathrm{FPd}(K^*_{R[[x]]})=1$，从而又有 $R$-模的正合列：$0\to K^*/(xF^*)\to F^*/(xF^*)\to M\to 0$，由于 $\mathrm{FPd}(M_R)=2$，$F^*/(xF^*)$ 为自由 $R$-模，则有 $\mathrm{FPd}(K^*/(xF^*_R))=1$. 作 $K^*$ 的 $R[[x]]$-模正合列：$0\to K_1^*\to F_1^*\to K^*\to 0$，这里 $K_1^*$ 为强表现 $R[[x]]$-模，$F_1^*$ 为投射 $R[[x]]$-模，由模同态定理可得 $R$-模的正合列

$$0\to K_1^*/(xF_1^*)\cap K_1^*\to F_1^*/(xF_1^*)\to K^*/(xK^*)\to 0$$

式中：$F_1^*/(xF_1^*)$ 为投射 $R$-模；$K_1^*/(xF_1^*)\cap K_1^*$ 为强表现 $R$-模. 则有 $\mathrm{FPd}(K^*/(xK^*_R))\leqslant 1$.

再考虑 $R$-模的正合列：$0\to xF^*/(xK^*)\to K^*/(xK^*)\to K^*/(xF^*)\to 0$，由前面所证 $\mathrm{FPd}(K^*/(xK^*_R))\leqslant 1$ 和 $\mathrm{FPd}(K^*/(xF^*_R))=1$，再由引理3，$\mathrm{FPd}(xF^*/(xK^*_R))\leqslant 1$. 又因 $x$ 为未定元，则 $xF^*/(xK^*)\cong F^*/K^*\cong M$，于是 $\mathrm{FPd}(M_R)\leqslant 1$，与假设 $\mathrm{FPd}(M_R)=2$ 矛盾. 于是，有 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=3$.

③归纳假设当 $\mathrm{FPd}(M_R)=n\geqslant 2$ 时，有 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=n+1$. 下设 $\mathrm{FPd}(M_R)=n+1$，作 $R$-模的正合列：$0\to K\to F\to M\to 0$，这里 $\mathrm{FPd}(K_R)=n$，$F$ 为自由 $R$-模. 由归纳假设，有

$$\mathrm{FPd}(K_{R[[x]]})=n+1>2,\ \mathrm{FPd}(F_{R[[x]]})\leqslant 2$$

由引理3，有

$$\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})\leqslant \max\{\mathrm{FPd}(F_{R[[x]]}),\ \mathrm{FPd}(K_{R[[x]]})+1\}\leqslant n+2$$

又有

$$\max\{\mathrm{FPd}(F_{R[[x]]}),\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})-1\}\geqslant \mathrm{FPd}(K_{R[[x]]})=n+1$$

则 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})\geqslant n+2$. 所以 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=n+2$.

3)、4)显然成立.

注1：从定理1的证明可见，对于任意 $M\in\mathscr{M}_R$，$\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})\neq 1$.

**推论2**　设 $R$、$R[[x]]$ 为完备凝聚交换环，且 $0<\mathrm{FPD}(R)<+\infty$，则 $\mathrm{FPD}(R[[x]])\geqslant 3$.

证明：因为无表现维数为1的环，故 $\mathrm{FPD}(R)\geqslant 2$，于是 $\mathrm{FPD}(R[[x]])\geqslant 3$.

**推论3**　设 $R$ 为半局部的完备凝聚交换环，$R[[x]]$ 为完备凝聚交换环，且 $0<\mathrm{FPD}(R)<+\infty$，则 $\mathrm{FPD}(R[[x]])\geqslant 4$.

证明：因为没有表现维数为2的半局部环.

**定理2**　设 $R$ 是完备凝聚交换环，$M$ 为 $R$-模，则 $\mathrm{FPd}(M_R)=\mathrm{FPd}(M[[x]]_{R[[x]]})$.

证明：令 $\mathrm{FPd}(M_R)=n$，即存在投射分解 $\cdots\to P_{n+j}\to\cdots P_n\to P_{n-1}\to\cdots P_0\to M\to 0$ 使得 $P_{n+i}$，$i=0,1,2,\cdots$ 是有限生成的. 故得 $M[[x]]$ 的投射分解（由引理5和推论1，$R[[x]]\otimes P_i\cong P_i[[x]]$，$i=0,1,2,\cdots$ 是投射 $R[[x]]$-模）

$$\cdots\to R[[x]]\otimes P_{n+j}\to\cdots\to R[[x]]\otimes P_n\to R[[x]]\otimes P_{n-1}\to\cdots\to R[[x]]\otimes P_0\to R[[x]]\otimes M\to 0$$

若 $P_{n+i}$，$i=0,1,\cdots$ 是有限生成的，则 $R[[x]]\otimes P_{n+i}$，$i=0,1,\cdots$ 也是有限生成的. 于是

$$\mathrm{FPd}(M[[x]]_{R[[x]]})\leqslant \mathrm{FPd}(M_R)$$

现在假定 $M[[x]]$ 有投射分解

$$\cdots\to Q_{n+j}\to\cdots\to Q_n\to Q_{n-1}\to\cdots\to Q_0\to M[[x]]\to 0 \tag{2}$$

使得 $Q_{n+i}$，$i=0,1,2,\cdots$ 是有限生成的. 这些 $Q_i$ 都是投射 $R[[x]]$-模，但作为 $R$-模，它们首先是投射 $R$-模，作为一个 $R$-模，$M[[x]]$ 事实上是可数无穷多个 $M$ 的直积，因此 $\mathrm{FPd}(\prod M)\leqslant n$，若取式(2)为 $M[[x]]$ 的一个最短的投射分解，则由引理2，$\mathrm{FPd}(M_R)\leqslant n=\mathrm{FPd}(M[[x]]_{R[[x]]})$.

综上，有 $\mathrm{FPd}(M_R)=\mathrm{FPd}(M[[x]]_{R[[x]]})$.

**定理3**　设 $R$、$R[[x]]$ 为凝聚环，则任意 $M^*\in\mathscr{M}_{R[[x]]}$，$\mathrm{FPd}(M^*_{R[[x]]})\leqslant \mathrm{FPd}(M^*_R)+1$.

证明：任意 $M^*\in\mathscr{M}_{R[[x]]}$，考虑 $R[[x]]$-模的正合列

$$0\to M^*[[x]]\to M^*[[x]]\xrightarrow{e} M^*\to 0$$

式中：$e: M^*[[x]]\to M^*$，$m^*\otimes x^i\mapsto m^*x^i$，任意 $m^*\in M^*$. 由引理3和定理2得

$$\mathrm{FPd}(M^*_{R[[x]]})\leqslant \mathrm{FPd}(M^*[[x]]_{R[[x]]})+1\leqslant \mathrm{FPd}(M^*_R)+1$$

**定理4**　设 $R$、$R[[x]]$ 为完备凝聚交换环，若下列2个条件之一成立，则有 $\mathrm{FPD}(R[[x]])\leqslant \mathrm{FPD}(R)+1$.

1) 若存在一个有限生成的 $R[[x]]$-模 $M^*$，使 $\mathrm{FPd}(M^*_{R[[x]]})=\mathrm{FPD}(R[[x]])$，且 $M^*$ 视为 $R$-模是有限生成的；

2) 若存在循环 $R[[x]]$-模 $(a^*)$，使 $\mathrm{FPd}(a^*)_{R[[x]]}=\mathrm{FPD}(R[[x]])$，且 $(a^*)$ 视为 $R$-模是有限生成的.

从而当 $\mathrm{FPD}(R)>0$ 时，又有

$$\mathrm{FPD}(R[[x]])=\mathrm{FPD}(R)+1$$

证明：2）的条件蕴含 1）中条件成立，故只需在条件 1）下证明定理结论成立即可.

若 1）成立，由定理 3，得 $\mathrm{FPD}(R[[x]])\leqslant\mathrm{FPD}(R)+1$. 若又有 $\mathrm{FPD}(R)>0$，由定理 1，得 $\mathrm{FPD}(R[[x]])\geqslant\mathrm{FPD}(R)+1$，于是 $\mathrm{FPD}(R[[x]])=\mathrm{FPD}(R)+1$.

**定理 5** 设 $R$、$R[[x]]$ 为完备凝聚交换环，若下列 2 个条件之一成立，则有 $\mathrm{FPD}(R[[x]])=\mathrm{FPD}(R)+1$.

1）$\mathrm{WD}(R)<\mathrm{GD}(R)$；

2）$\mathrm{FPD}(R)=\mathrm{GD}(R)+1$.

证明：显然 1）成立，则 2）成立（见文献[3]），当 $\mathrm{FPD}(R)=\mathrm{GD}(R)+1$ 时，有

$$\mathrm{GD}(R[[x]])=\mathrm{GD}(R)+1=\mathrm{FPD}(R)$$

从而由文献[3]中命题 4.2，有

$$\mathrm{FPD}(R[[x]])\leqslant\mathrm{GD}(R[[x]])+1=\mathrm{FPD}(R)+1$$

又因此时 $\mathrm{FPD}(R)>0$，由定理 1，得

$$\mathrm{FPD}(R)+1\leqslant\mathrm{FPD}(R[[x]])$$

从而有 $\mathrm{FPD}(R[[x]])=\mathrm{FPD}(R)+1$.

## 3 结论

1）设 $R$、$R[[x]]$ 为完备凝聚交换环，任意 $M\in\mathscr{M}_R$，有

① 若 $\mathrm{FPd}(M_R)=0$，则 $\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=0$；

② 若 $\mathrm{FPd}(M_R)\geqslant1$，则

$$\mathrm{FPd}(M_{R[[x]]})=\mathrm{FPd}(M_R)+1$$

从而又有

③ 若 $\mathrm{FPD}(R)=0$，则 $\mathrm{FPD}(R[[x]])=0$；

④ 若 $0<\mathrm{FPD}(R)<+\infty$，则

$$\mathrm{FPD}(R[[x]])\geqslant\mathrm{FPD}(R)+1$$

2）设 $R$ 是完备凝聚交换环，$M$ 为 $R$-模，则 $\mathrm{FPd}(M_R)=\mathrm{FPd}(M[[x]]_{R[[x]]})$.

3）设 $R$、$R[[x]]$ 为凝聚环，则任意 $M^*\in\mathscr{M}_{R[[x]]}$，$\mathrm{FPd}(M^*_{R[[x]]})\leqslant\mathrm{FPd}(M^*_R)+1$.

4）设 $R$、$R[[x]]$ 为完备凝聚交换环，若下列 2 个条件之一成立，则有 $\mathrm{FPD}(R[[x]])\leqslant\mathrm{FPD}(R)+1$.

① 若存在一个有限生成的 $R[[x]]$-模 $M^*$，使 $\mathrm{FPd}(M^*_{R[[x]]})=\mathrm{FPD}(R[[x]])$，且 $M^*$ 视为 $R$-模是有限生成的；

② 若存在循环 $R[[x]]$-模 $(a^*)$，使 $\mathrm{FPd}(a^*)_{R[[x]]}=\mathrm{FPD}(R[[x]])$，且 $(a^*)$ 视为 $R$-模是有限生成的.

从而当 $\mathrm{FPD}(R)>0$ 时，又有

$$\mathrm{FPD}(R[[x]])=\mathrm{FPD}(R)+1$$

5）设 $R$、$R[[x]]$ 为完备凝聚交换环，若下列 2 个条件之一成立，则有 $\mathrm{FPD}(R[[x]])=\mathrm{FPD}(R)+1$.

① $\mathrm{WD}(R)<\mathrm{GD}(R)$；

② $\mathrm{FPD}(R)=\mathrm{GD}(R)+1$.

**参考文献：**


[1] COSTAD L. Parameterizing families of non-noetherian rings[J]. Communications in Algebra, 1994, 22(10): 3997-4011.

[2] XUE Wei-min. On $n$-presented modules and almost excellent extensions[J]. Communications in Algebra, 1999, 27(3): 1091-1102.

[3] ZHOU De-xu, GONG Zhi-wei. On presented dimensions of modules and rings[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2010: 1-13. doi: 10.1155/2010/256267.

[4] 李元林. 有限表现维数的换环定理[J]. 南京大学学报：数学半年刊, 1990, 7(1): 75-84.
LI Yuan-lin. Some theorems on chane of rings of the finitely presented dimension[J]. Journal of Nanjing University: Mathematical Biquarterly, 1990, 7(1): 75-84. (in Chinese)

[5] 周伯壎. 同调代数[M]. 北京：科学出版社, 1988.

[6] 程福长, 易忠. 环的同调维数[M]. 桂林：广西师范大学出版社, 2000.

[7] 李元林. F. P. -维数的合冲定理[J]. 数学研究与评论, 1993, 13(2): 283-288.
LI Yuan-lin. Syzygy theory of F. P. -dimension[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 1993, 13(2): 283-288. (in Chinese)

[8] 郭莹, 姚海楼. 多项式环的表现维数[J]. 山东大学学报：理学版, 2015, 50(4): 71-75.
GUO Ying, YAO Hai-lou. The presented dimensions of polynomial rings[J]. Journal of Shandong University: Natural Science, 2015, 50(4): 71-75. (in Chinese)

[9] KANG Na, YAO Hai-lou. On the filtration dimensions of a standardly stratified algebra and its polynomial algebra[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2006, 26(3): 440-450.


（责任编辑 吕小红）